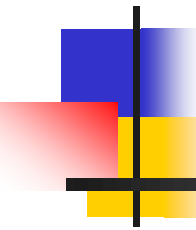


統計学入門 第8回

早稲田大学政治経済学部
西郷 浩

本日の目標

- 回帰分析の発展
  - 2つの説明変数
    - 平面の当てはめ
  - 変数変換の利用
- PC実習

2つ説明変数 (1)

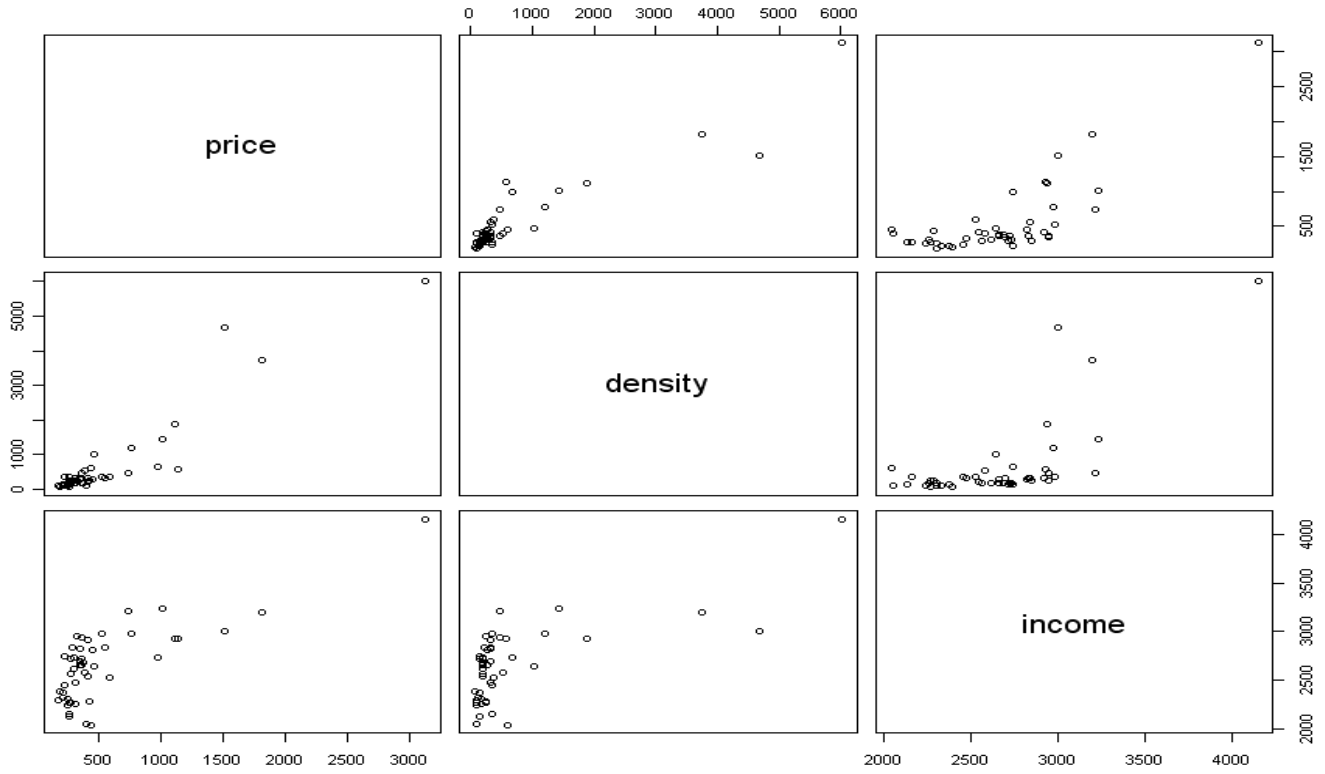
- 2つの説明要因
  - $y_i = a + b x_i + c z_i$
    - y: 住宅地平均価格
      (H22年7月1日、100円/m^2)
    - x: 人口密度
      (H22年10月1日, 人/km^2)
    - z: 1人当たり県民所得
      (H20年度, 1000円/人)

2つ説明変数 (2)

- 説明変数を2つ設ける理由
  - 住宅地価格への異なる影響
    - 混雑度：人口密度
    - 所得水準：1人当たり県民所得
  - 2つの変数が異なる影響をもつので、同時に説明要因に取り入れる。

2つ説明変数 (3)

図1：散布図行列（住宅地平均価格、人口密度、1人当たり県民所得）



資料：総務省統計研修所編『第61回日本統計年鑑 平成23年』

最小二乗法(1)

- 回帰係数 a, b, c をどう決めるか？
  ⇔回帰平面の位置をどう決めるか？
  - 当てはまりがもっともよくなるように。
    ⇔
    説明変数で説明できない部分（残差）が全体としてもっとも小さくなるように。
    ⇔
    最小二乗法の考え方が使える。

最小二乗法(2)

最小二乗法

$$\min \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \Leftrightarrow \min \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - b\,x_i - c\,z_i \right)_i^2$$

この最小化問題の解 $\Leftrightarrow$ 下の正規方程式の解

$$\begin{cases} n\,a + \left(\sum_i x_i\right) b + \left(\sum_i z_i\right) c = \left(\sum_i y_i\right) \\ \left(\sum_i x_i\right) a + \left(\sum_i x_i^2\right) b + \left(\sum_i x_i z_i\right) c = \left(\sum_i x_i y_i\right) \\ \left(\sum_i z_i\right) a + \left(\sum_i z_i x_i\right) b + \left(\sum_i z_i^2\right) c = \left(\sum_i z_i y_i\right) \end{cases}$$

最小二乗法(3)

- 平方和の分解も成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}d_i^2$$

$$SS_0 \qquad SS_R \qquad SS_E$$

ただし、$\hat{y}_i=a+bx_i+cz_i$

- したがって、$R^2 = SS_R/SS_0$ も計算でき、意味も以前と同じである。

回帰平面の推定(1)

- 平面の当てはめの結果

$$\hat{y} = -561 + 0.34x + 0.33z \quad R^2 = 0.90$$

  - 係数の符号は常識に合う結果である。
    - X(人口密度)の係数 ＞ 0
      - 人口密度が高い⇒住宅地価格は高い。
    - Z(1人当たり県民所得)の係数 ＞ 0
      - 所得が多い⇒住宅地価格は高い。

回帰平面の推定(2)

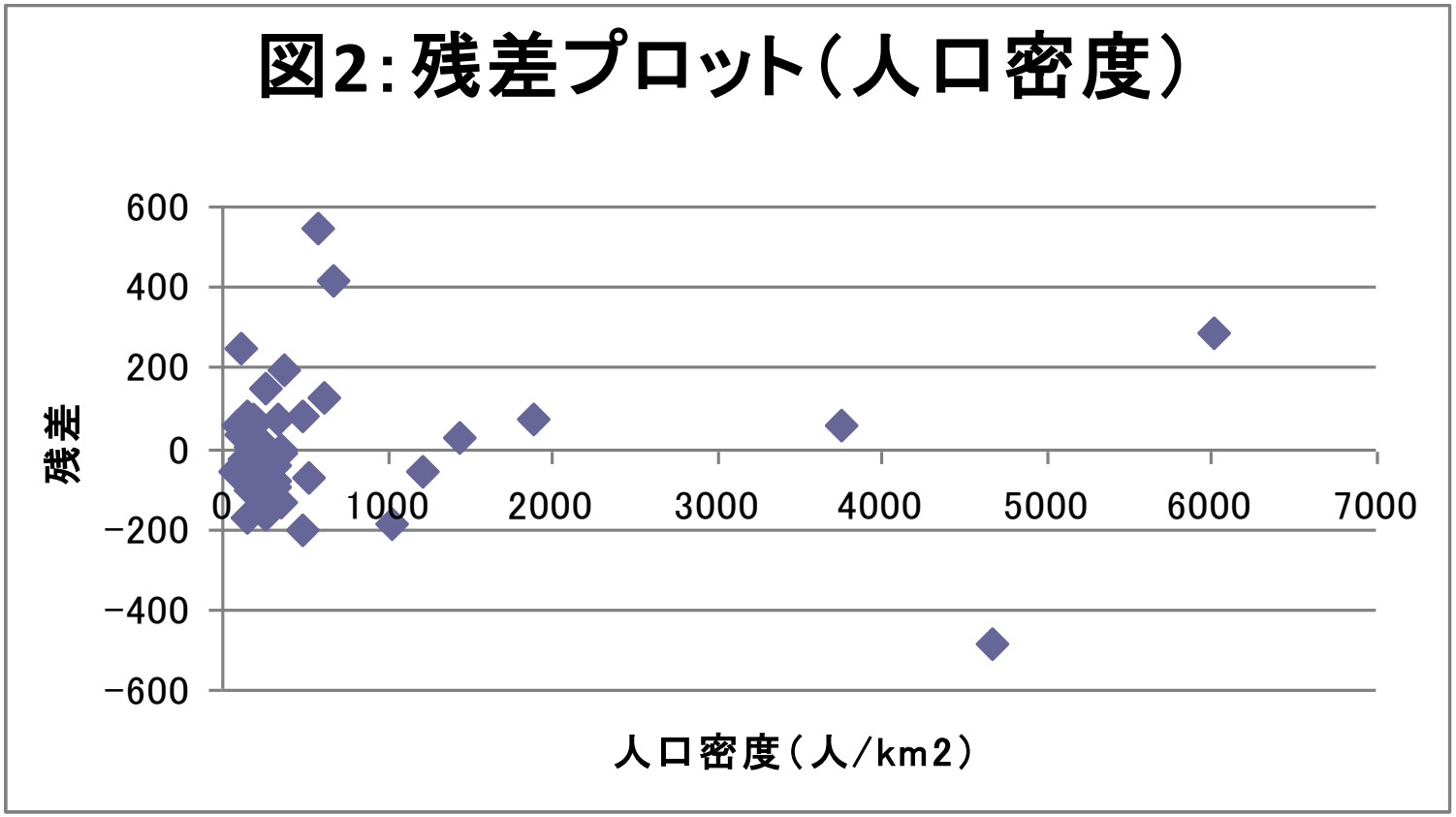


図2：残差プロット（人口密度）
600
400
200
0
−200
−400
−600
残差
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
人口密度（人/km2）

回帰平面の推定(3)

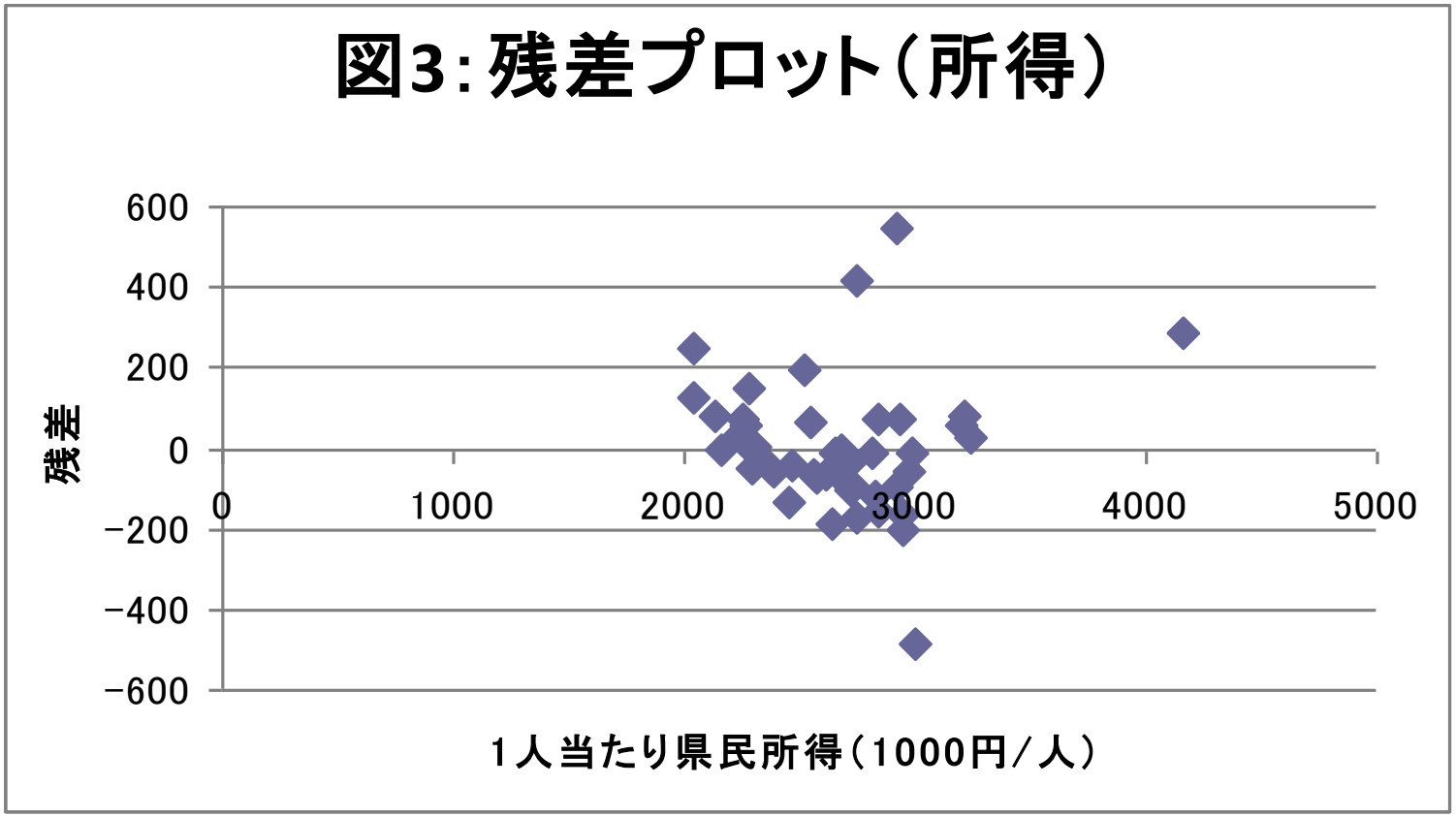


図3:残差プロット(所得)
600
400
200
0
−200
−400
−600
0
1000
2000
3000
4000
5000
残差
1人当たり県民所得(1000円/人)

回帰平面の推定(4)

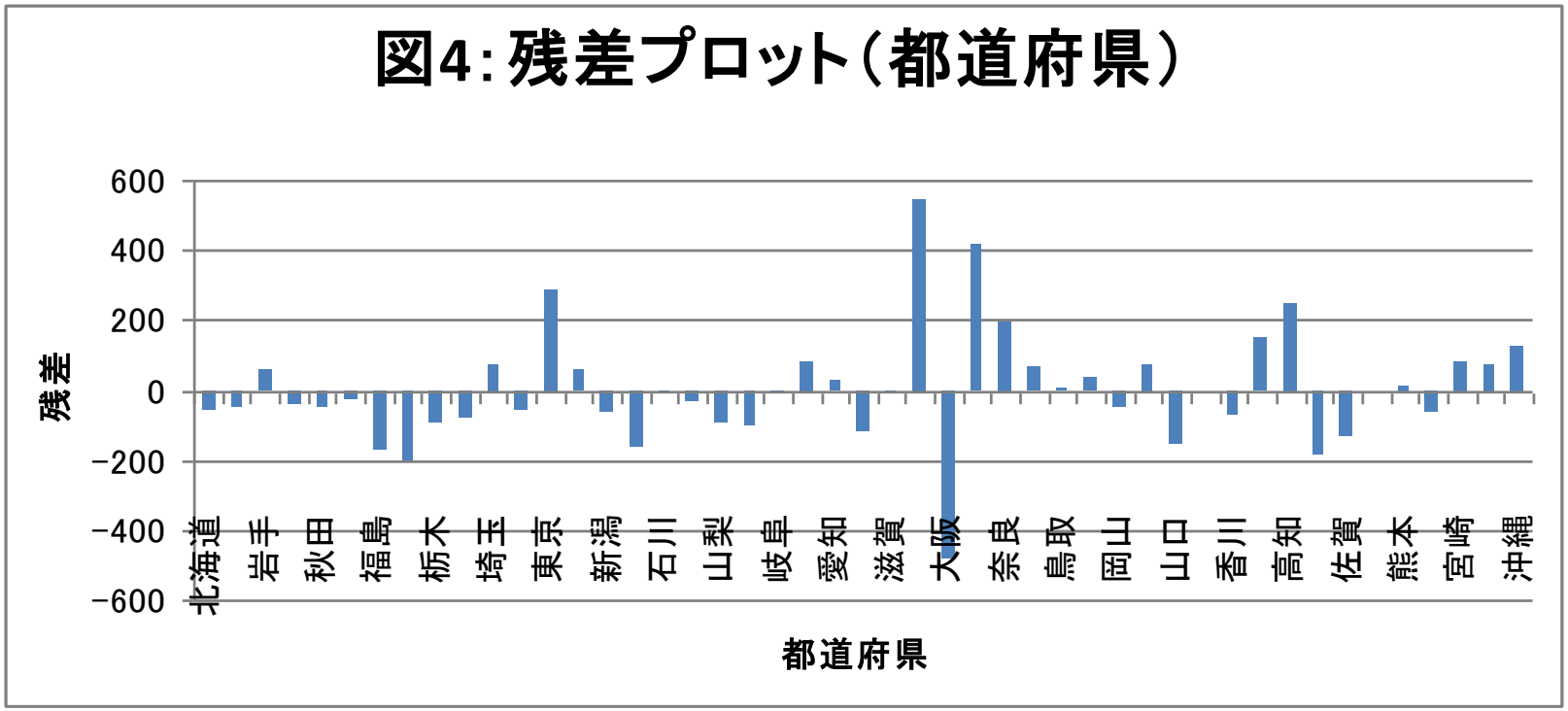


図4:残差プロット(都道府県)
残差
600
400
200
0
−200
−400
−600
北海道
岩手
秋田
福島
栃木
埼玉
東京
新潟
石川
山梨
岐阜
愛知
滋賀
大阪
奈良
鳥取
岡山
山口
香川
高知
佐賀
熊本
宮崎
沖縄
都道府県

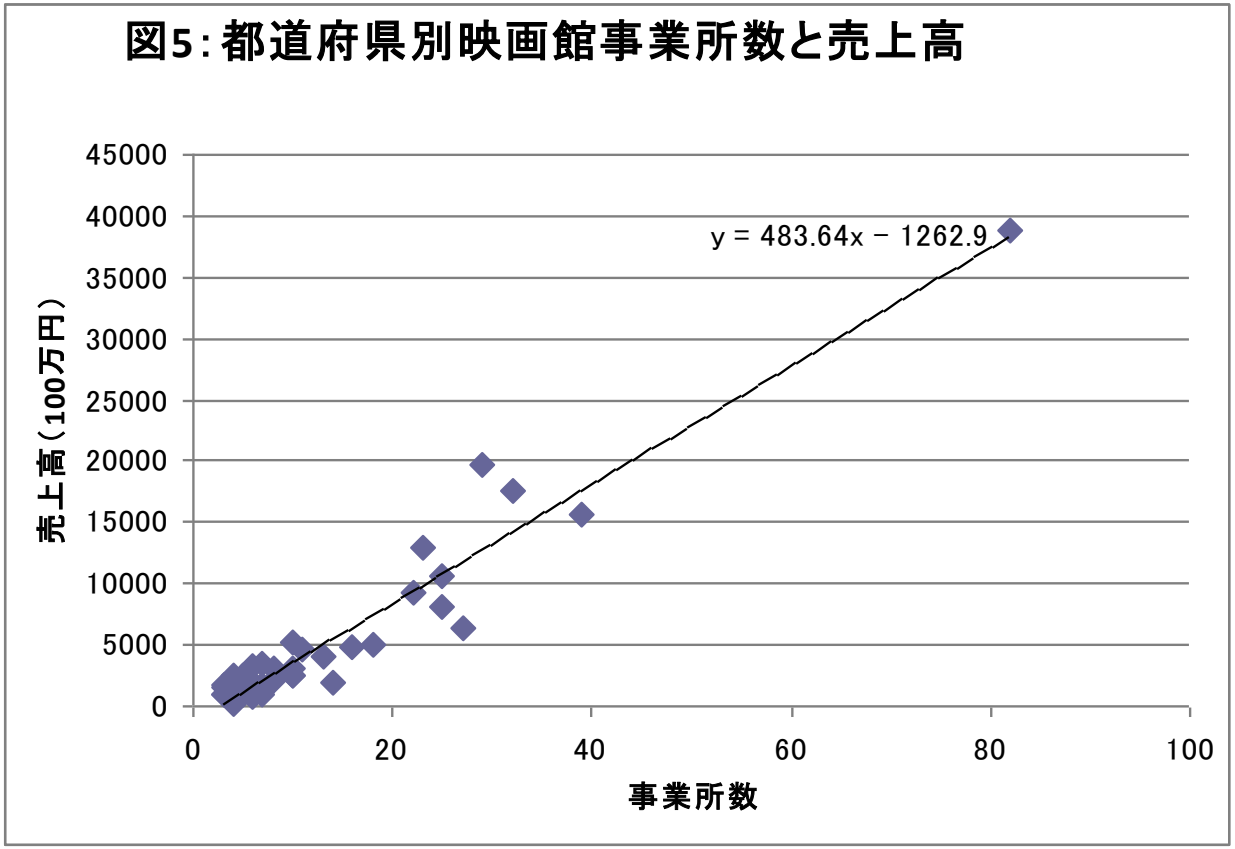
回帰平面の推定(5)

- 残差プロット
  - 大阪・京都・兵庫の残差が大きい。
    - 何が原因か。
- 散布図を良く見ると…
  - 曲線的な関係が見て取れる。

曲線的な関係(1)

- 都道府県別映画館数と売上高
  - x = (都道府県別映画館事業所数)（平成22年）
  - y = (都道府県別映画館売上高 100万円）（平成22年）
  - 島根県・徳島県の売上高：x と書いてある。
    - 県内に事業所が2つしかない。→ 秘匿処置
  - これらの県のおおよその売上高を推定する。

曲線的な関係(2)



資料：経済産業省「平成22年 特定サービス産業実態調査」

曲線的な関係(3)

- 散布図からの所見
  - 正の相関関係がある。
  - x が小さいところに観察点が集中している。
  - x が大きくなるにつれて y 軸方向のばらつきも拡大する傾向がある。
  - 最小二乗法による回帰式
    - y = -1263 + 484 x, R^2 = 0.93
    - x = 2 → y_hat = -296（負の売上高？）

曲線的な関係(4)

- 直線を当てはめるには無理がある。
  - 曲線的な傾向がある。
  - そのまま最小二乗法を適用するのは危険である。

変数変換の利用(1)

- もともとの関係が、直線ではない（曲線である）可能性がある。
  - 直線による近似に無理がある。
- 曲線的な関係をどのようにあつかうか。
  - 変数変換によって直線化する。
    - 常用対数変換: $y' = \log_{10} y$
    - 逆数変換: $y' = 1/y$
    - ベキ乗変換: $y' = y^p$

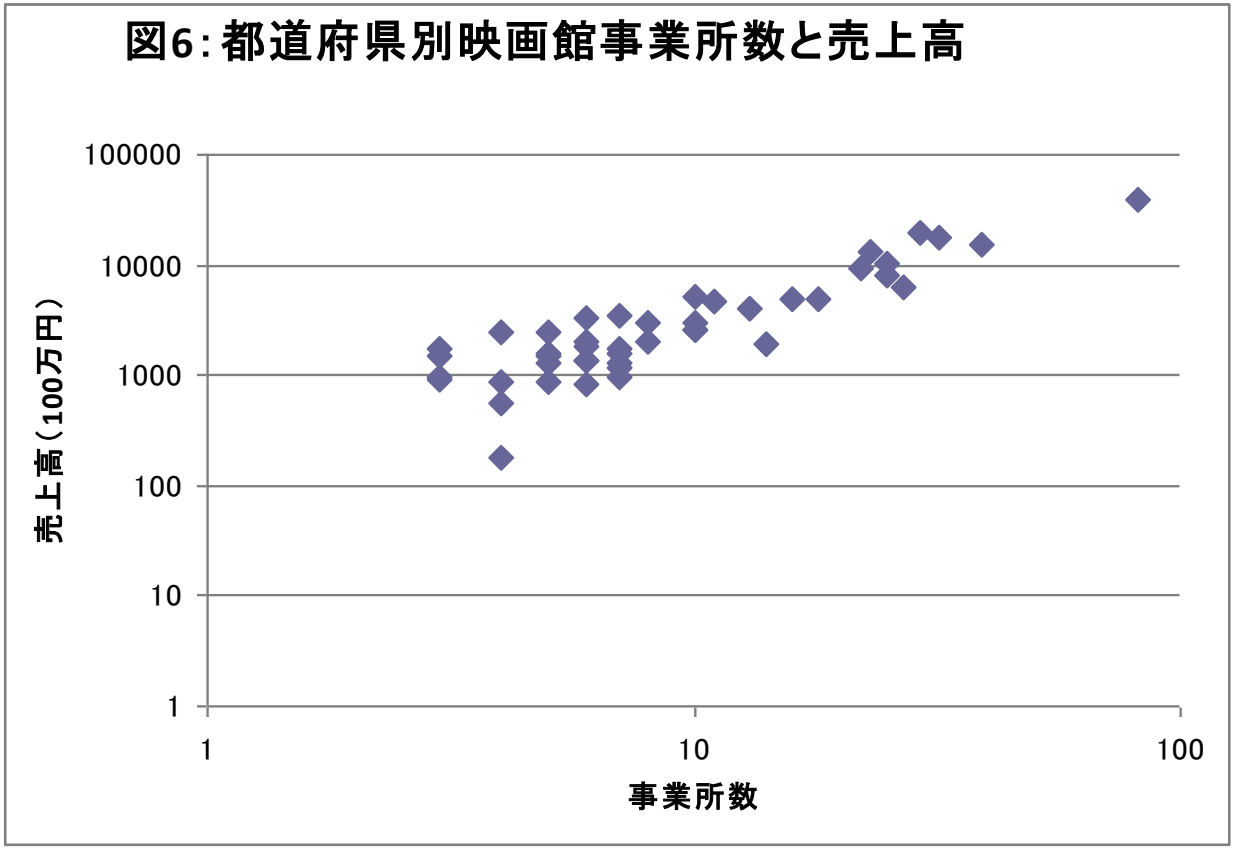
変数変換の利用(2)

- なかでも、対数変換がよく使われる。
  - 理由：解釈がしやすい。
  - 説明：
    - x が1%増加すると、y が b %変化する。
      - $y = a x^b$（乗法モデル）
        - b は弾力性とよばれる。
      - 注：通常のモデル（$y = a + bx$、xが1単位増加すると y がb単位変化する）を加法モデルとよぶことがある。

変数変換の利用(3)

- 対数の性質をもちいると、
  - $y = a x^{b}$
  - $\Leftrightarrow \log_{10} y = \log_{10} a + b \log_{10} x$
  - $y' = \log_{10} y$, $x' = \log_{10} x$, $a' = \log_{10} a$ とすれば、$y' = a' + b x'$
  - 要は、「対数変換してほぼ直線関係で近似できれば、変化率の間の関係が安定的である」ということ。

変数変換の利用(4)



資料：経済産業省「平成22年 特定サービス産業実態調査」

変数変換の利用(5)

$$\log_{10} y = 2.2 + 1.2 \log_{10} x$$

$$R^2 = 0.77$$

すなわち、

$$y = 10^{2.2} x^{1.2}$$

$x = 2$ のときの予測

$$y = 10^{2.2} \times 2^{1.2} = 443$$

変数変換の利用(6)

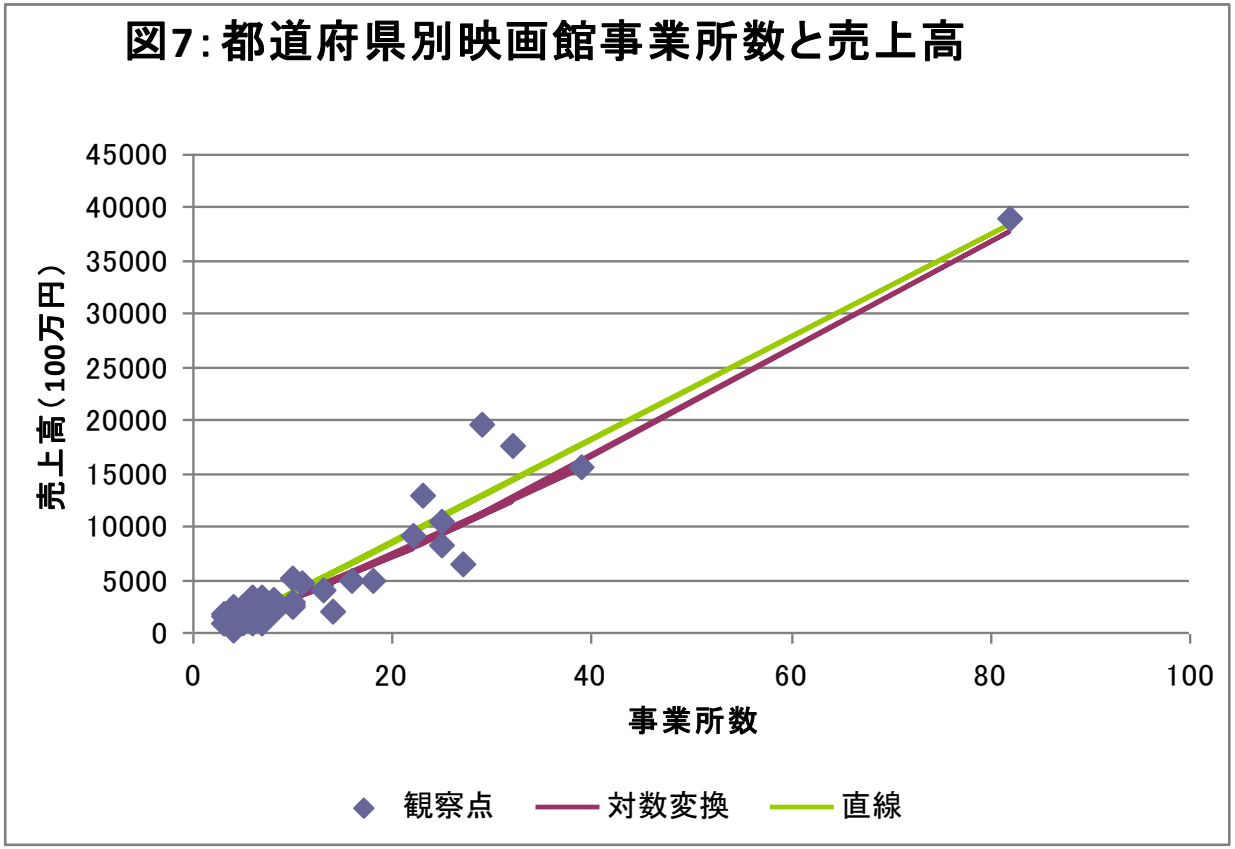


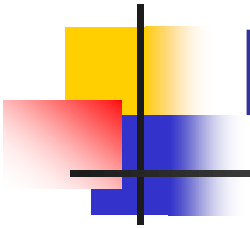
図7：都道府県別映画館事業所数と売上高
45000
40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
売上高（100万円）
0
20
40
60
80
100
事業所数
観察点
対数変換
直線

変数変換の利用(7)

- 弾力性=1.2 > 1
  - yの変化率(増加率) > xの変化率(増加率)
    → 散布図が尻上がり形状
  - 「yが xに対して弾力的である」という。
- 弾力性=(yの変化率)/(xの変化率)
  - 弾力性 > 1: 弾力的(尻上がり)
  - 弾力性 = 1: 比例関係
  - 0 < 弾力性 < 1: 非弾力的(頭打ち)

変数変換の利用(8)

- 加法モデルと乗法モデル
  - どちらを用いるかは経験的に（実際に当てはめて）判断する場合が多い。
- 対数以外の変数変換も利用される。
  - 対数変換は係数の解釈（弾力性）がしやすいので多用される。



PC実習

- 分析ツールを利用した回帰式の推定
  - 散布図の描画（省略）
  - 回帰係数の推定
  - 残差プロットの描画（省略）
- 変数変換
  - 散布図における対数変換
  - 変数変換を利用した回帰分析