統計学入門 第11回

早稲田大学政治経済学部
西郷 浩

本日の目標

- 条件つき確率
- 乗法法則
- 事象の独立

条件つき確率(1)

- 条件つき確率
  - サイコロをふたつ振る。
  - *A*:出目がふたつとも3以上
  - *B*:出目の和が7
  - 「*A* が生じた」という条件のもとで *B* が生じる確率は？

図1:2つのサイコロの出目

	1	2	3	4	5	6
1						*B*
2						
3						
4						
5					*A*	
6						

条件つき確率(1)

- 条件つき確率の意味
  - 「*A*が生じた」という条件のもとで:
    - 両方の目が3以上であるものに注目する。
      - 標本空間を *A* に限定して確率を評価する。
    - 前スライドの図1において、黄色の部分(*A*)だけに注目して、その中で、緑色の部分(*B*) が生起する確率を考える。

条件つき確率(2)

- 条件つき確率の評価
  - P(B|A):
    - 「A が生起した」という条件のもとでBが生起する確率
      - 標本空間をAに限定して確率を評価する。
    - 「サイコロをふたつ振る試行においては、標本空間なかのすべての根元事象が等確率で生起する」ことに注意する。

条件つき確率(3)

- 条件事象
  - 「Aが生起した」に対応する標本点の数:
    - 16(黄色の部分)
- 評価対象の事象
  - 「(標本空間をAに制限したときに) B が生起する」=「A とBが同時に生起する」に対応する標本点の数
    - 2(黄色の中の緑の部分)

条件つき確率(4)

- したがって、この例においては、
  $$P(B\,|\,A) = 2/16 = 1/8$$
- 以上の議論をどのように一般化するか？

条件つき確率(5)

- 条件つき確率

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

  - 例による確認:
    　サイコロをふたつ振る試行において、条件つき確率は 1/8 であった。上の公式で計算すると、

    P(B|A) =P($A\cap B$)/P(A)
    =(2/36)/(16/36) = 2/16 = 1/8

条件つき確率(6)

- 条件つき確率と同時(積事象の)確率
  - 条件つき確率 P(B | A) の意味:
    - 「Aが生じた」という状況でB が生じている確率
  - 同時確率 P($A \cap B$)の意味:
    - A とB とが同時に生じる確率
  - 類似点:積事象 $A \cap B$が評価対象。
  - 相違点:考慮する標本空間の範囲

条件つき確率(7)

- (全)標本空間:Ω
  - 例:サイコロをふたつ振る試行において、(全)標本空間は36個の単一事象から成る。
  - P(Ω) = 1 (標本空間に含まれるいずれかの事象が必ず生起する。)
- 条件つき確率 $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
- 同時確率 $$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(\Omega)}$$

条件つき確率(8)

- 例：出席者から学生をひとり選ぶ。
  - A: 選ばれた学生が男性
  - B: 選ばれた学生が喫煙者
  - $\mathrm{P}(A \cap B)$
    ＝（出席者から男子喫煙者が選ばれる確率）
    ＝（男子喫煙者数）÷（全出席者）
  - $\mathrm{P}(B | A)$
    ＝（男子出席者から喫煙者が選ばれる確率）
    ＝（男子喫煙者数）÷（男子出席者）

条件つき確率(9)

- 例題
  - サイコロを1つ振る。
    - A: 偶数の目が出る。
    - B: 4以上の目が出る。
    - $P(A|B) = ?$
    - $P(B|A) = ?$

条件つき確率(10)

- サイコロを2つ振る。
  - A: 出目の和が偶数になる。
  - B: 出目の和が7より大きい。
  - $P(A|B) = ?$
  - $P(B|A) = ?$

条件つき確率(11)

- トランプ（52枚、ジョーカーなし）から1枚を抜き取る。
  - A: キングを抜き取る。
  - B: ハートを抜き取る。
  - C: クイーンを抜き取る。
  - $P(A|B) = ?$
  - $P(B|A) = ?$
  - $P(A|C) = ?$
  - $P(C|B) = ?$

条件つき確率(12)

- トランプ（52枚、ジョーカーなし）から2枚を抜き取る（非復元）。
  - A：1枚目にハートを抜き取る。
  - B：2枚目にハートを抜き取る。
  - $P(A) = ?$
  - $P(B) = ?$
  - $P(B|A) = ?$
  - $P(A|B) = ?$

乗法法則(1)

- 乗法法則

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$
$$= P(A)P(B \mid A)$$

  - 標本空間をうまく制限して、同時確率の計算を簡単にする。

乗法法則(2)

- 誕生日問題
  - 25人の中に、少なくとも2人の誕生日が同じである確率は？
    - 仮定:
      - 1年は365日
      - ある人の誕生日は、1/365 の確率で1月1日、1/365 の確率で1月2日、…、1/365 の確率で12月31日になる。
      - ある人の誕生日と別の人の誕生日は独立に分布する。

乗法法則(3)

- 解法:
  - 25人を1列に並べる。
  - A_k:
    - 「先頭からk番目の人の誕生日が、先頭からk-1 番目の人の誕生日と異なる事象」
  - 先頭の2人の誕生日が異なる事象:
    - $A_1 \cap A_2$
  - 先頭の2人の誕生日が異なる確率
    - $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = 1 \times \frac{364}{365}$

乗法法則(4)

- 先頭の3人の誕生日が異なる事象
  - $A_1 \cap A_2 \cap A_3$
- 先頭の3人の誕生日が異なる確率
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2)$
    $= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$
    $= 1 \times \dfrac{364}{365} \times \dfrac{363}{365}$
- 先頭の25人の誕生日が異なる確率
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{25})$
    $= P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_{25}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{24})$
    $= 1 \times \dfrac{364}{365} \times \cdots \times \dfrac{341}{365} = 0.43 \ldots$

乗法法則(5)

- 少なくとも2人の誕生日が同じである確率
= 1 − 全員の誕生日が異なる確率
  - 1 − 0.43 = 0.57
    - 存外高い！
    - 25人から2人選ぶ組み合わせ = 300組

乗法法則(6)

- 例題
  - トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(非復元)
    - A:1枚目にキングを抜き取る。
    - B:2枚目にクイーンを抜き取る。
    - $P(A \cap B) = ?$
  - トランプ(52枚、ジョーカーなし)から2枚を抜き取る(復元)
    - $P(A \cap B) = ?$

事象の独立(1)

- 独立性
  - 事象Aと Bが独立

$$P(A|B)=P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B) \Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

- 「事象Aの発生と事象Bの発生とが無関係である」の意。
- 独立性は、上の条件の成否で確かめられる。
  - 「直観的に考えて明らかだ」は通用しない。

事象の独立(2)

- 例
  - サイコロを1つ振る。
    - A: 出目が2の倍数
    - B: 出目が3の倍数
    - C: 出目が4の倍数
    - $P(A) = 3/6$; $P(A|B) = 1/2$; AとBは独立である。
    - $P(B) = 2/6$; $P(B|C) = 0$; BとCは独立でない。
    - $P(C) = 1/6$; $P(C|A) = 1/3$; CとAは独立でない。

事象の独立(3)

- サイコロを2つ振る。
  - A: 出目の和が2の倍数である。
  - B: 出目の和が3の倍数である。
  - C: 出目の和が4の倍数である。
  - P(A) = ?; P(A|B) =?; AとBは独立？
  - P(B) = ?; P(B|C) =?; BとCは独立？
  - P(C) = ?; P(C|A) =?; CとAは独立？

事象の独立(4)

- トランプ(52枚、ジョーカーなし)を1枚抜き取る。
  - A:キングを抜き取る。
  - B:ハートを抜き取る。
  - C:クイーンを抜き取る。
  - P(A) = ?; P(A|B) = ?; AとBは独立？
  - P(B) = ?; P(B|C) = ?; BとCは独立？
  - P(C) = ?; P(C|A) = ?; CとAは独立？