統計学入門 第12回

早稲田大学政治経済学部
西郷 浩

本日の目標

- Bayes の定理
  - 3枚のコインの問題
  - Bayes の定理
  - Bayes の定理の応用

3枚のコインの問題(1)

- 3枚のコインがある
  - HH（両面とも表の刻印）
  - HT（片面に表、もう片面に裏の刻印）
  - TT（両面とも裏の刻印）
- ３枚のうちから1枚を取り出して、片面だけを見たら表の刻印であった。
- 取り出したコインがHHである確率は？

3枚のコインの問題(2)

- よくある誤答
  - コインは3種類ある。
  - TTでないことは確実だ。
  - 残るは HH と HT の2種類である。
  - でたらめに取っているのだから、どちらのコインも五分五分で取り出されたはずだ。
  - したがって、HHである確率は 1/2 だ。

3枚のコインの問題(3)

- Bayesの定理による解答
  - 記号
    - H_1 = {取り出したコインがHH}
    - H_2 = {取り出したコインがHT}
    - H_3 = {取り出したコインがTT}
    - A = {片面が表の刻印}

3枚のコインの問題(3)

- 利用可能な条件
  - $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$
    （どのコインも同じ確率で取り出される）
  - 条件つき確率
    - $P(A|H_1) = 1$ （HH を取ったら、表の確率1）
    - $P(A|H_2) = 1/2$ （HT を取ったら、表の確率1/2）
    - $P(A|H_3) = 0$ （TT を取ったら、表の確率0）

3枚のコインの問題(4)

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \quad \frac{P(H_1 \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_k \cap A))}$$

$$= \frac{P(H_1 \cap A)}{P(H_1 \cap A) + P(H_2 \cap A) + P(H_3 \cap A)}$$

$$= \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3)}$$

3枚のコインの問題(5)

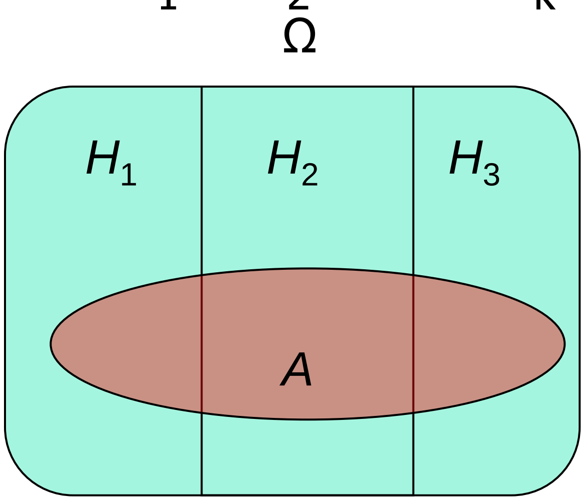
$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Bayes の定理(1)

- Bayes の定理
  - 前提：
    - 標本空間が$H_1, H_2, \ldots, H_k$ に分割されている。
つまり：$H_i \cap H_j = \varphi \ (i \neq j)$ かつ $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$
    - $P(H_i)\ (i = 1,2, \ldots, k)$ が既知
    - $P(A|H_i)\ (i = 1,2, \ldots, k)$ が既知
  - このとき

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$



Bayes の定理(2)

$$左辺 = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(H_i \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_k \cap A))}$$

$$= \frac{P(H_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j \cap A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$

Bayes の定理(3)

- Bayesの定理の有用性
  - H_i: 原因となるような事象
  - A: 結果となるような事象
  - 3つの条件（満たされる場合が少なくない）
    - 原因がすべてわかっている。
    - おのおのの原因がどの程度の可能性で発生するかは既知。
    - 原因H_iのもとで、結果Aがどの程度の可能性で発生するかも既知。

Bayes の定理(4)

- これらの条件がそろえば、結果Aの発生を与件として原因H_iの発生確率を数値的に評価できる。
  - 結果から原因について判断できる。
- P(H_i)（事前確率）を観察された事実A によって、あらたな値 P(H_i|A)（事後確率）へと更新する、とも読める。
  - $P(H_i) \xrightarrow[\uparrow A]{} P(H_i|A) \xrightarrow[\uparrow B]{} P(H_i|A \cap B)$

Bayes の定理の応用(1)

- ある大学の入学試験
  - 模試の判定がAであったら
    - 合格率95%
  - 模試の判定がそれ以外であったら
    - 合格率30%
  - 入試の受験者における模試判定の人数比
    - A:それ以外 = 10:90

Bayes の定理の応用(2)

- 問題:
  - 合格者のうち、模試の判定がAである確率(割合)は?
- 記号の整理:
  - H_1: 受験者の模試の判定がAである。
  - H_2: 受験者の模試の判定がA以外である。
  - D: 入学試験に合格する。
  - 求めるべき確率: $P(H_1|D)$

Bayes の定理の応用(3)

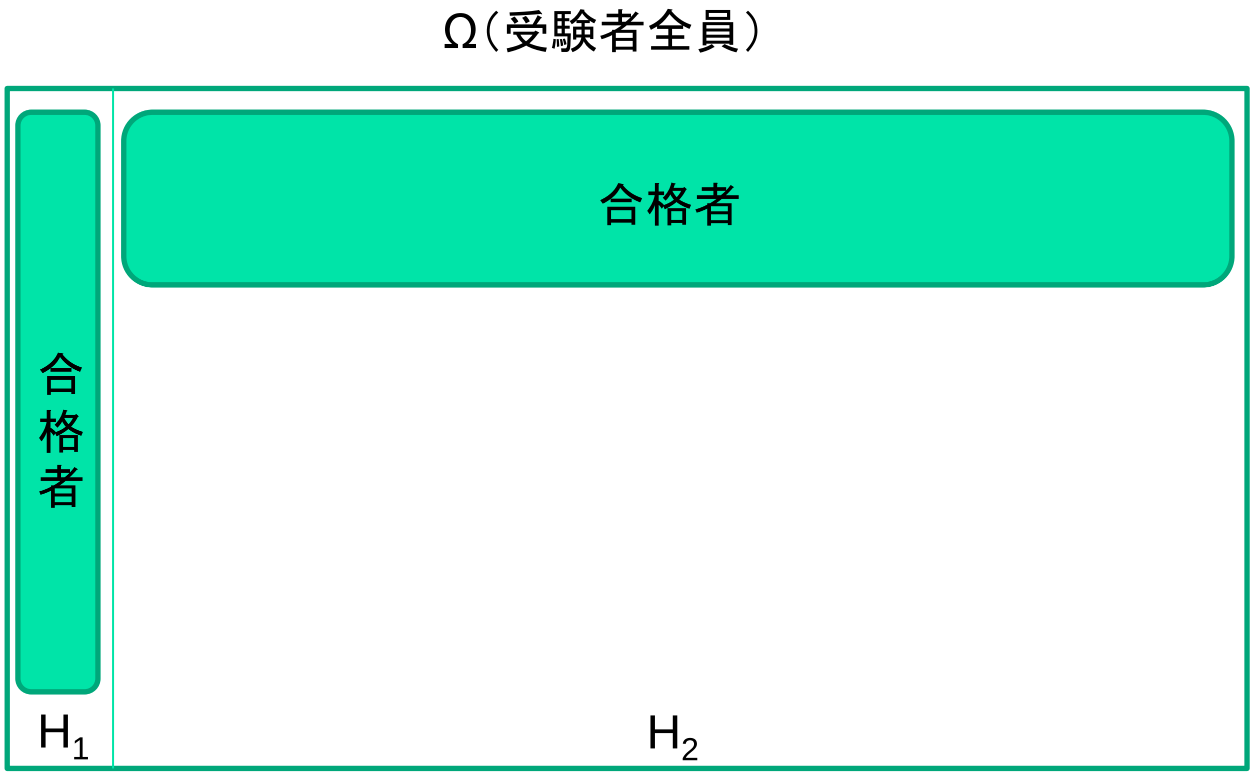
- あたえられた条件の整理
  - P(H_1) = 0.1; P(H_2) = 0.9
  - P(D|H_1) = 0.95; P(D|H_2) = 0.3
- Bayes の定理の適用
  - $P(H_1|D) = \frac{P(H_1)P(D|H_1)}{P(H_1)P(D|H_1)+P(H_2)P(D|H_2)}$

$$= \frac{0.1 \times 0.95}{0.1 \times 0.95 + 0.9 \times 0.3} = 0.26$$

Bayes の定理の応用(4)

- 直感と違う？
  - A判定者なら合格率95%なら、合格者に占めるA判定者の割合がもっと高いはずだ。
  - 入試の合否は、A判定者を見つけるうえでinformative ではある。
    - $P(H_1) = 0.1$; $P(H_1|D) = 0.26$
  - それにしても、なぜ、こんなに低いのか。
    - 「A判定者以外の数が圧倒的に多い」ことが理由。

Bayes の定理の応用(5)



Bayes の定理の応用(6)

- 3つのドアの問題（Let’s make a deal）
  - 閉じられたドアが3つある。
    - そのうちの1つの裏には車、残りの2つの裏にはヤギが隠されている。
    - 回答者（あなた）は自分が選んだドアの裏に隠してあるものをもらえる。

Bayes の定理の応用(7)

- 回答者（あなた）が1番のドアを選んだ。
- 司会者（どのドアの裏に車を隠してあるか知っている）が3番のドアを開けて、ヤギが入っていることを回答者に見せた。
- 司会者いわく:「1番のドアから2番のドアに変えてもいいですけれども、変えますか？」
- 回答者（あなた）はドアを変えるべきか？