



# 統計学入門 第13回

---

早稲田大学政治経済学部  
西郷 浩



# 本日の目標

---

- 確率変数
  - 確率変数とは
  - 確率変数の例
- 確率変数の性質の表現
  - 確率変数の確率分布
  - 確率変数の期待値
  - 確率変数の分散



# 確率変数とは

---

- 確率変数： $X$ 
  - 試行：偶然によって結果が定まる。
    - 例：サイコロを1つ投げる。
      - 起こりうる結果：  
1の目が出る、2の目が出る、...、6の目が出る。
  - 確率変数：試行の結果によって値が定まる。
    - 例：サイコロを1つ投げるとき、
      - $X = 1$ （もし出目が偶数なら）； $0$ （それ以外するとき）
      - $X =$ （出目の2倍）



# 確率変数の例

---

## ■ 確率変数の分類

### ■ 離散型確率変数

- $X = (\text{サイコロの出目})$
- $X = (\text{一定時間内にかかってくる電話の回数})$
- $X = (\text{最初に表が出るまでのコインの回数})$

### ■ 連続型確率変数

- $X = (\text{100メートル走のタイム})$
- $X = (\text{ソフトボールの遠投の飛距離})$



# 確率変数の確率分布(1)

---

## ■ 離散型確率変数の確率関数

- $p_X(x) = P(X = x)$

- 例1:  $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目)

- $p_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$

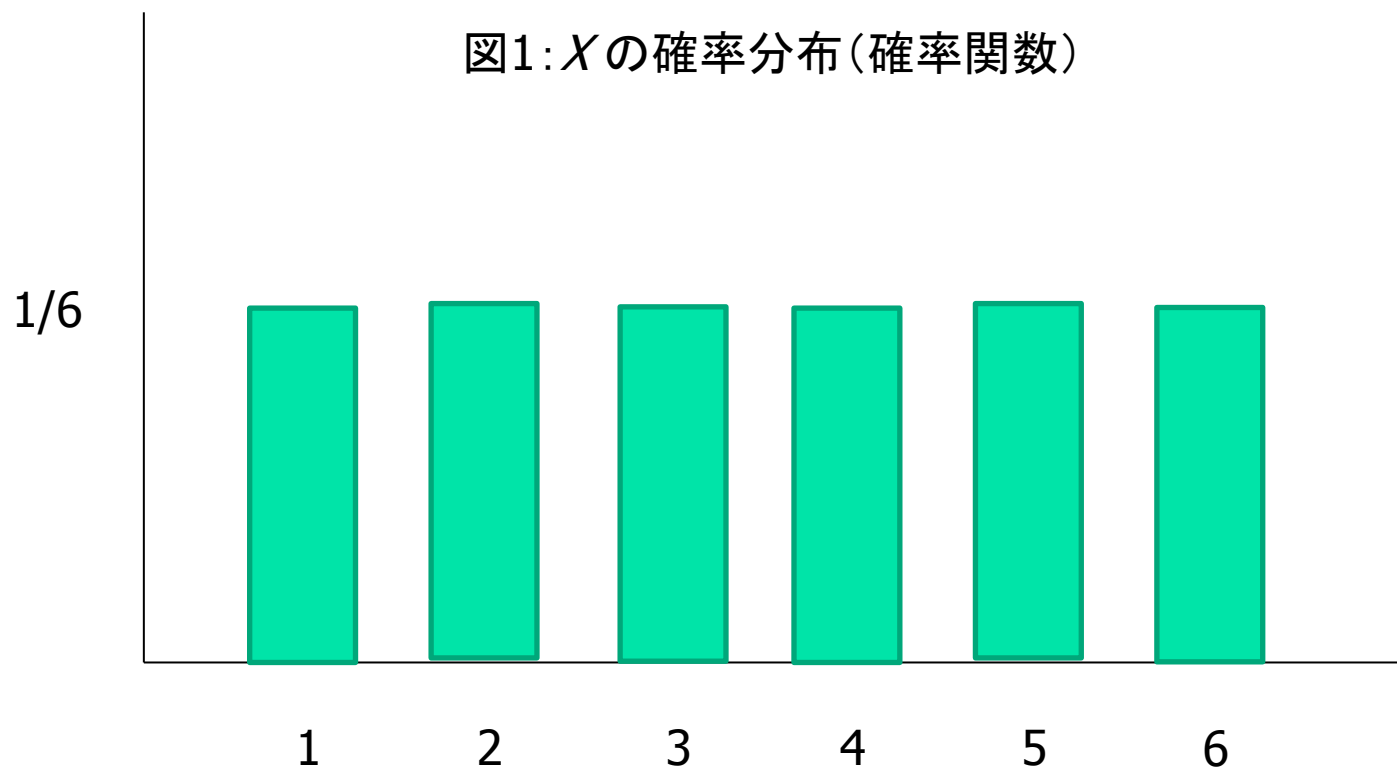
- $p_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

- ...

- $p_X(6) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

# 確率変数の確率分布(2)

図1:  $X$ の確率分布(確率関数)





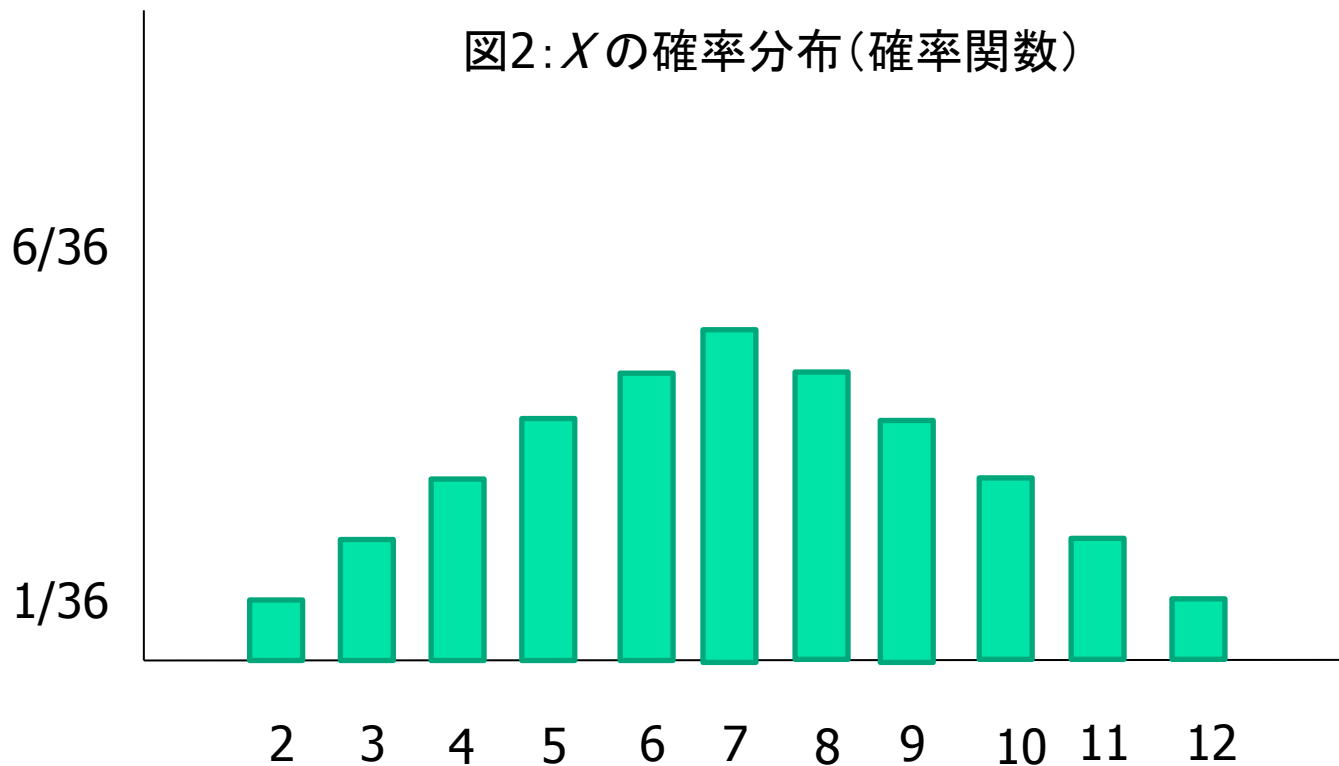
# 確率変数の確率分布(3)

---

- 例2:  $X =$  (サイコロを2つ投げたときの出目の和)
  - $p_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{36}$
  - $p_X(3) = P(X = 3) = \frac{2}{36}$
  - ...
  - $p_X(7) = P(X = 7) = \frac{6}{36}$
  - $p_X(8) = P(X = 8) = \frac{5}{36}$
  - ...
  - $p_X(12) = P(X = 12) = \frac{1}{36}$

# 確率変数の確率分布(4)

図2:  $X$ の確率分布(確率関数)







# 確率変数の確率分布(5)

---

- 連続型確率変数確率密度関数

- $f_X(x)$ : つぎのような性質をもつ関数。

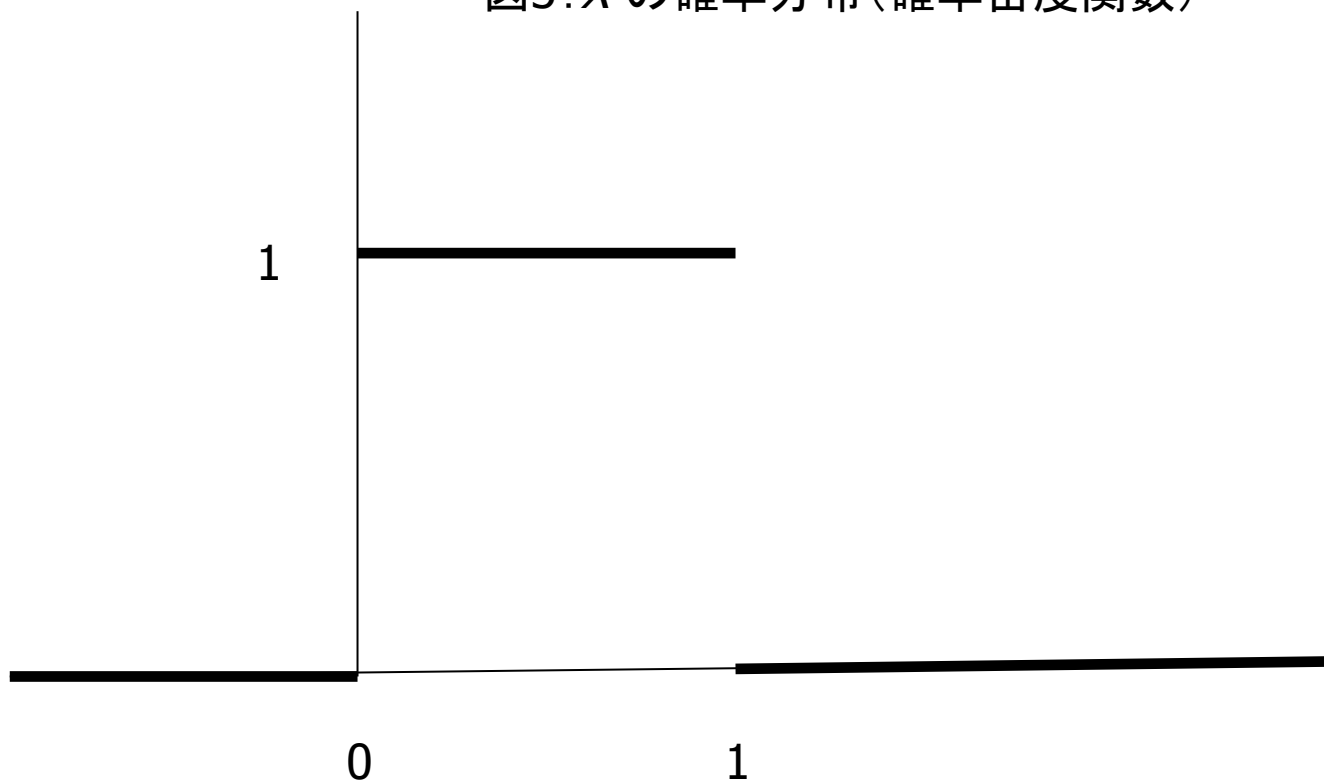
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

- 例:  $X$  が、0と1の間で一様に出やすい確率変数であるときの確率密度関数

- $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$

# 確率変数の確率分布(6)

図3:  $X$ の確率分布(確率密度関数)





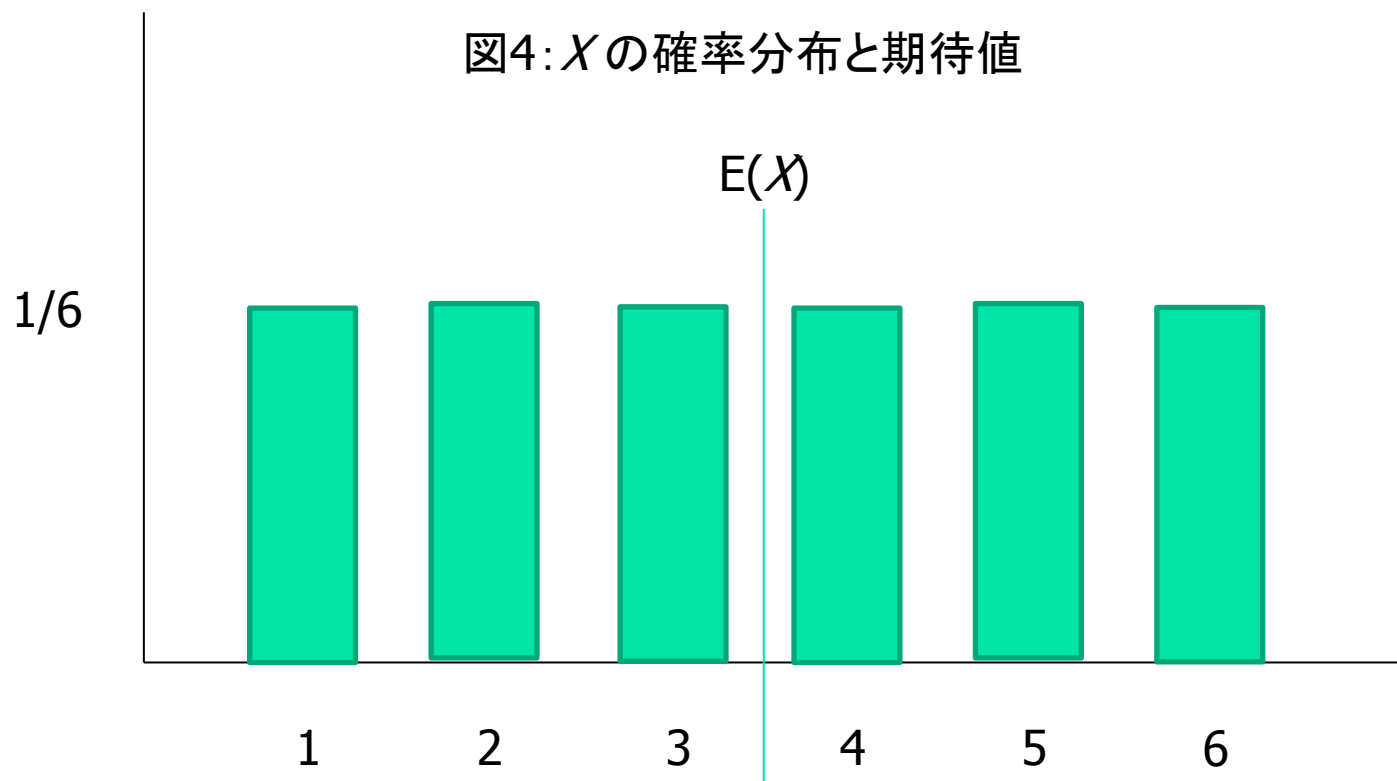
# 確率変数の期待値(1)

---

- 期待値: 確率変数の平均的な値
  - 離散型確率変数:  $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots$ 
    - 例:  $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目)
      - $E(X) = (1/6) \times 1 + (1/6) \times 2 + (1/6) \times 3$   
 $+ (1/6) \times 4 + (1/6) \times 5 + (1/6) \times 6$   
 $= 7/2$
      - 1つのサイコロを60,000回投げたとする。およそ10,000回1がでて、およそ10,000回2が出て、...、およそ10,000回6が出るであろう。したがって、出目の算術平均が期待値におおよそ等しくなる。

# 確率変数の期待値(2)

図4:  $X$ の確率分布と期待値





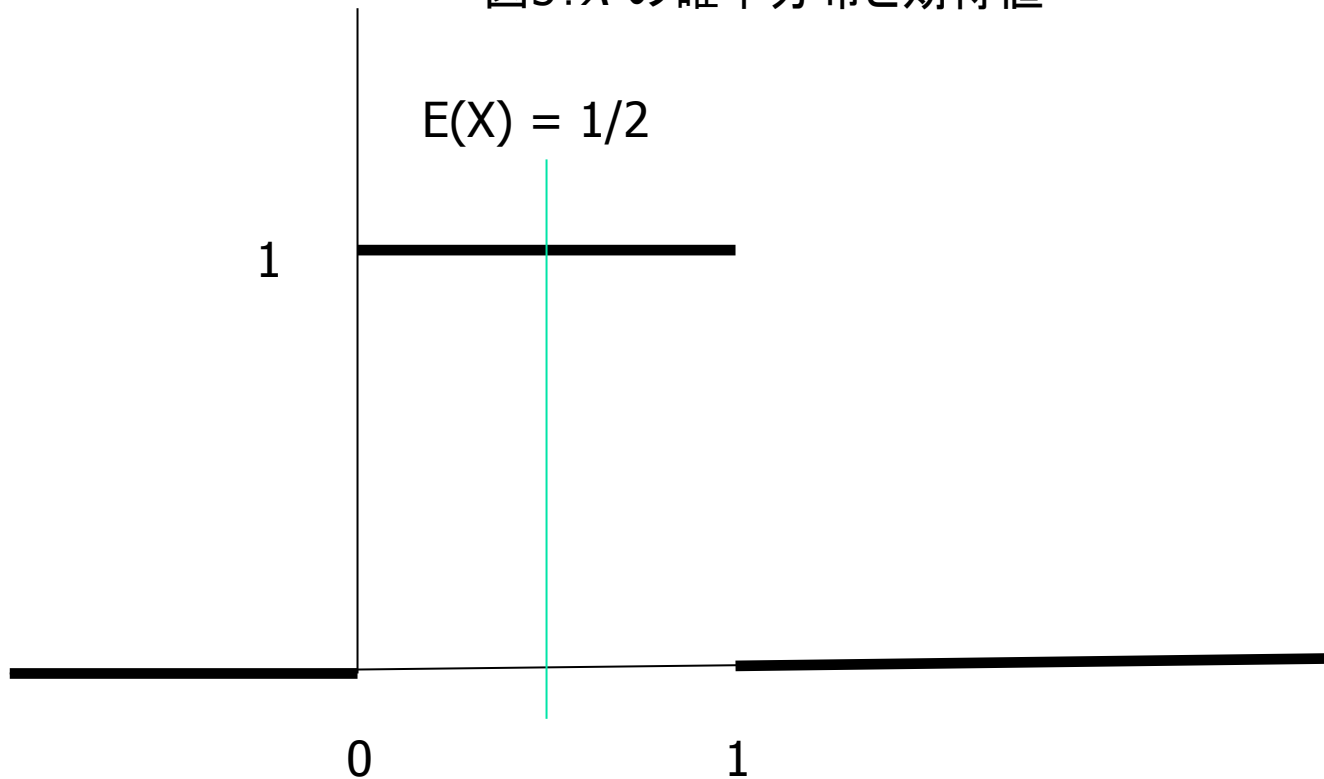
# 確率変数の期待値(3)

---

- 連続型確率変数:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ 
  - 例:  $X$ が、0と1の間で一様に出やすい確率変数
    - $E(X) = \int_0^1 1 dx = 1/2$
    - 0から1までの値が一様に発生する。したがって、実際に $X$ を10,000回発生させると、0から1までの値がまんべんなく発生するだろう。その算術平均は1/2におおよそ等しくなる。

# 確率変数の期待値(4)

図5:  $X$ の確率分布と期待値





# 確率変数の分散(1)

---

- 分散: 確率変数の平均的な散らばり

- 離散型確率変数:

- $V(X) = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \dots$

- ただし、 $\mu = E(X)$

- 例:  $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目)

- $$\begin{aligned} V(X) &= (1/6) \times (1 - 7/2)^2 + (1/6) \times (2 - 7/2)^2 \\ &\quad + (1/6) \times (3 - 7/2)^2 + (1/6) \times (4 - 7/2)^2 \\ &\quad + (1/6) \times (5 - 7/2)^2 + (1/6) \times (6 - 7/2)^2 \\ &= 35/12 \end{aligned}$$

- 分散をあらわす記号:  $\sigma^2 = V(X)$



## 確率変数の分散(2)

---

- 分散: 確率変数の平均的な散らばり
  - 連続型確率変数:
    - $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$ 
      - ただし、 $\mu = E(X)$
    - 例:  $X$ が、0と1の間で一様に出やすい確率変数
      - $V(X) = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/12$





# 期待値の性質

---

- 直線による新しい確率変数

- $Y = a + bX$  ただし、 $a$  と  $b$  は定数。

- 例:  $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目)

- $Y = 1 + 2X$

- $E(Y) = a + bE(X)$

- 例:  $E(Y) = 1 + 2 \times (7/2) = 8$

- $Y$ の確率分布を求めて定義式どおりに計算しなくても、 $X$ の期待値から  $Y$ の期待値を直接計算できる。



# 分散の性質

---

- 直線による新しい確率変数

- $Y = a + bX$  ただし、 $a$  と  $b$  は定数。

- 例:  $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目)

- $Y = 1 + 2X$

- $V(Y) = b^2 V(X)$

- 例:  $V(Y) = 2^2 \times (35/12) = 35/3$

- $Y$ の確率分布を求めて定義式どおりに計算しなくても、 $X$ の分散から  $Y$ の分散を直接計算できる。



# 確率変数の標準化

---

- 直線による変換によって、確率変数の期待値と分散を、それぞれ、0, 1に変更する。

- $Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$

- 標準偏差： $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

- 例： $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目)

- $Z = \frac{X - 7/2}{\sqrt{35/12}}$

- $Z$  の期待値と分散が、それぞれ、0, 1 になることを確かめよ。



# 練習問題

---

- 問題1:

- コインを1つ投げる。 $X$ を表が出たら1、そうでないとき0となる確率変数とする。 $X$ の確率関数と期待値、分散を求めなさい。

- 問題2:

- $X =$  (1つのサイコロを投げた時の出目) とする。このとき、 $Y = 1 + 2X$  の確率関数を求めなさい。確率関数から  $Y$  の期待値と分散を求めなさい。



# 解答：問題1

---

- $E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

- $V(X) = \frac{1}{2} \times \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



# 解答：問題2

表1: XとYの確率分布

$X$	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$Y$	3	5	7	9	11	13

$$E(Y) = \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 7 + \frac{1}{6} \times 9 + \frac{1}{6} \times 11 + \frac{1}{6} \times 13 = 8 = 1 + 2E(X)$$

$$V(Y) = \frac{1}{6} \times (3 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (7 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (9 - 8)^2 \\ + \frac{1}{6} \times (11 - 8)^2 + \frac{1}{6} \times (13 - 8)^2 = \frac{35}{3} = 2^2 V(X)$$



# 確率変数の期待値と (確率変数の)観察値の算術平均

---

- 観察値の算術平均→確率変数の期待値
  - 大数の法則
    - サイコロの出目の期待値=3.5
    - サイコロを多数回投げて計算した算術平均→3.5



# 確率変数の分散と (確率変数の)観察値の分散

---

- 観察値の分散→確率変数の分散
  - 大数の法則
    - サイコロの出目の分散=35/12
    - サイコロを多数回投げて計算した分散→35/12