統計学01

早稲田大学政治経済学部
第2回
西郷 浩

本日の目標

- 第4章 確率
  - 4.1 ランダムネスと確率
  - 4.2 標本空間と事象
  - 4.3 確率の定義
  - 4.4 加法定理
  - 4.5 条件つき確率と独立性

4.1 ランダムネスと確率

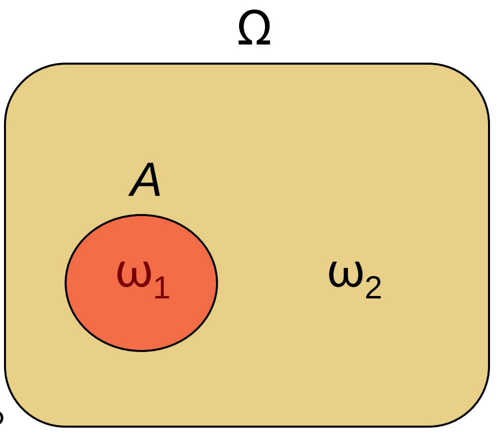
- 偶然性（ランダムネス）
  - 偶然をともなう試行
    - コイン・トス
    - 同一人物の 100m 走 のタイム
    - 同一物の測定
  - いつも同じ結果が生じるとは限らない。
    ⇒ 偶然性を理論的にあつかう手法はないか？
    - 偶然性の中に法則性を見出す。その法則性を利用する。

4.2 標本空間と事象(1)

- 確率論
  - 測度論によって厳密に記述される。
    ∴ 集合に関連する概念によって、確率の概念が整備されている。
    - 要するに：多少、集合に関連する用語が出てきます。
- 標本点と標本空間、事象
  - 標本点 ω：偶然をともなう試行の結果のひとつ
  - 標本空間 Ω：標本点全体の集合
  - 事象 A：標本空間の部分集合（標本点の集合）

4.2 標本空間と事象(2)

- 例:
  - 試行:1枚のコインを投げる。
    - 標本点:ω_1 = H(表), ω_2 = T(裏)
    - 標本空間:$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\} = \{H, T\}$
    - 事象:
      - $A = \{\omega_1\} = \{H\}$
      - $B = \{\omega_2\} = \{T\}$
      - $C = \{\omega_1, \omega_2\} = \{H, T\} = \Omega$
      - $D = \{\ \} = \varphi$
      - A を「表になる事象」ということも多い。



4.2 標本空間と事象(3)

- 事象の分類
  - 根元事象:ただひとつの標本点から成る。
  - 複合事象:複数の標本点をふくむ。
    - 根元事象への分解が可能である。
- 和事象、積事象、補事象、排反な事象
  - 和(結合):$A \cup B = \{\omega : \omega \in A$ または $\omega \in B\}$
  - 積(共通部分):$A \cap B = \{\omega : \omega \in A$ かつ $\omega \in B\}$
  - 補事象(余事象):$A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$ (Aでない事象)
  - 排反な事象: $A \cap B = \phi$(同時には発生しない事象)

4.2 標本空間と事象(4)

- 例
  - 試行：サイコロをひとつ振る。
  - 標本点：ω_i ={ i の目が出る} (i =1,2,…,6)
  - 標本空間：$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$
  - 事象：
    - A = {2の倍数の目が出る} = $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$
    - B = {3の倍数の目が出る} = $\{\omega_3, \omega_6\}$
    - C = {奇数の目が出る} = $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$
    - $A \cap B = \{\omega_6\}$; $A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$;
      $A \cap C = \varphi$; $B^c = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}$

4.2 標本空間と事象(5)

- 便利な演算法則

分配法則

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

ド・モルガンの法則

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

その他

$$(A^c)^c = A$$

4.3 確率の定義(1)

- 結論からいうと…
  - 確率を「内容」によって定義することは困難。
  - 形式的（数学的）な条件を満たすもの（測度）はすべて確率としてとりあつかう、という立場が主流である。
- 「内容」からみた確率の定義
  - ラプラスの定義：
    - 同様に確からしい根元事象が全部で N 個あり、事象 A に有利な根元事象が R 個あったとするとき、$P(A) = R/N$ とする。
  - （経験的な）頻度による定義：
    - n 回の試行のうち事象 A が n_A 回生じたとする。n_A / n の極限値を $P(A)$ とする。

4.3 確率の定義(2)

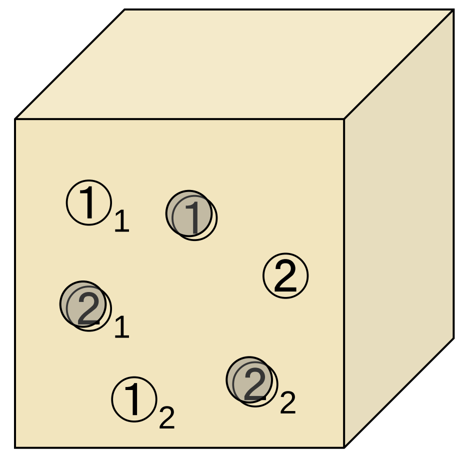
- 主観による定義：
  - 人間の選好に一定の合理性を仮定すれば、主観的な確信の度合いが論理的整合性を持つ確率とみなせる。
- 公理主義的な確率の定義（形式的な定義）
  - Ωの部分集合（厳密には、Ωの部分集合を要素とするσ集合体に属する集合）に対して、以下の3つの条件を満たす集合関数（測度）を確率とみなす。
    1. （σ集合体に属する）すべての集合A に対して $0 \leqq P(A) \leqq 1$
    2. $P(\Omega) = 1$
    3. （σ集合体に属する）排反な無限系列 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ に対して、$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$

4.4 加法定理

- 排反な事象 A, B（つまり $A \cap B = \varphi$）について
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
    - 例：サイコロをひとつ振る試行において、A={2以下の目が出る}, B={5以上の目が出る} とすると、
      $P(A \cup B)$=P({2以下の目が出る または 5以上の目が出る})
      =P({1, 2, 5, 6 のいずれかが出る}) = 4/6
      $P(A)$ = P({1, 2 のいずれかが出る}) = 2/6
      $P(B)$ = P({5, 6 のいずれかが出る}) = 2/6
      $A \cap B$ = {2以下の目が出る かつ 5以上の目が出る}=φ
      であることに注意する。
- 一般の事象においては、
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4.5 条件つき確率と独立性(1)

- 条件つき確率
  - 例:
    - 試行:6つの玉が入った箱からひとつの玉を取り出す。
    - 標本点:
      - ω_1 = {①$_1$ を取り出す}
      - ω_2 = {①$_2$ を取り出す}
      - ω_3 = {② を取り出す}
      - ω_4 = {① を取り出す}
      - ω_5 = {②$_1$ を取り出す}
      - ω_6 = {②$_2$ を取り出す}



4.5 条件つき確率と独立性(2)

- A = {取り出した玉の数字が1}
  B = {取り出した玉の色が白}
- 取り出した玉の数字が1である確率:
  $P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 3/6$
- 取り出した玉の色が白であった(Bが生じている)とする。このとき、その玉の数字が1である確率は?
  - $\{\omega_1\}$
  - $\{\omega_2\}$
  - $\{\omega_3\}$
  - $\{\omega_4\}$
  - $\{\omega_5\}$
  - $\{\omega_6\}$

$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}$: B に該当する部分に着目してA が生じる確率を求める。(標本空間を B に制限することに相当する。)

$\{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6\}$: Bに該当しない

4.5 条件つき確率と独立性(3)

- 条件つき確率の定義

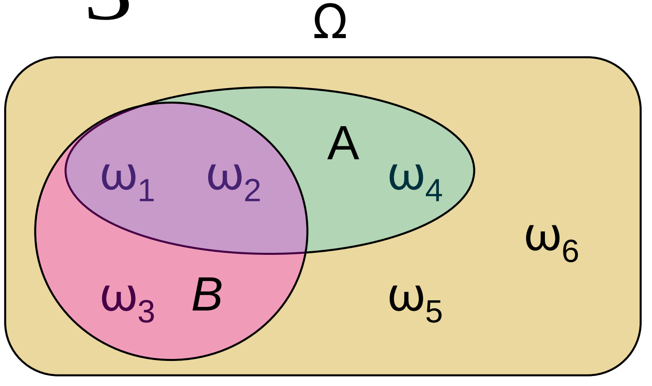
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

- 先の例では、

$$P(A|B)=\frac{2/6}{3/6}=\frac{2}{3}$$

- 乗法定理

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$
$$=P(A)P(B|A)$$



4.5 条件つき確率と独立性(4)

- 独立性
  - 事象*A* と *B* が独立

$$P(A|B)=P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

    - 「事象*A*の発生と事象Bの発生とが無関係である」の意。
  - 先の例では、*A* と *B* とが独立ではない。

$$P(A|B)=2/3\neq 3/6=P(A)$$

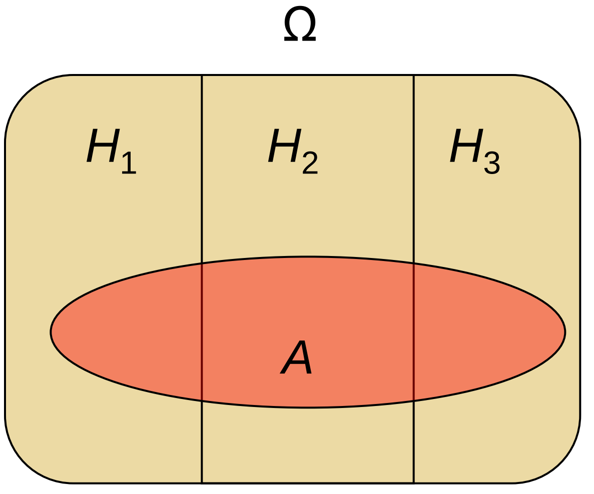
  - もし、箱に②と➊を追加したら、*A* と *B* は独立になる。

$$P(A|B)=2/4=4/8=P(A)$$

4.5 条件つき確率と独立性(5)

- Bayes の定理
  - 前提:
    - 標本空間がH_1, H_2,…,H_k に分割されている。
      つまり: $H_i \cap H_j = \varphi$ ($i \neq j$) かつ $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$
    - $P(H_i)$ ($i = 1,2, \ldots, k$) が既知
    - $P(A|H_i)$ ($i = 1,2, \ldots, k$) が既知
  - このとき

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$



4.5 条件つき確率と独立性(6)

$$
左辺 = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}
$$

$$
= \frac{P(H_i \cap A)}{P((H_1 \cap A) \cup (H_2 \cap A) \cup \cdots \cup (H_k \cap A))}
$$

$$
= \frac{P(H_i \cap A)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j \cap A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)P(A \mid H_j)}
$$

4.5 条件つき確率と独立性(7)

- Bayesの定理の有用性
  - H_i: 原因となるような事象
  - A: 結果となるような事象
  - ふたつの条件（満たされる場合が少なくない）
    - おのおのの原因がどの程度発生するかは既知。
    - 原因H_iのもとで、結果Aがどの程度発生するかも既知。
  - これらの条件がそろえば、結果Aの発生を与件として原因H_iの発生確率を数値的に評価できる。
    - 結果から原因について判断できる！
  - $P(H_i)$（事前確率）を観察された事実A によって、あらたな値 $P(H_i|A)$（事後確率）へと更新する、とも読める。

4.5 条件つき確率と独立性(8)

- Bayesの定理の応用:3つのコインの問題
  - 3種類のコインがある
    - HH(両面とも表の刻印)
    - HT(片面に表、もう片面に裏の刻印)
    - TT(両面とも裏の刻印)
  - 3つのうちから(どれだかわからないように)ひとつを取り出して、片面だけを見たら表の刻印であった。
  - 取り出したコインがHHである確率は?

4.5 条件つき確率と独立性(9)

- よくある誤答
  - コインは3種類ある。しかもTTでないことは確実だ。
  - 残るは HH と HT 2つで、最初にでたらめに取っているのだから、どちらのコインも五分五分の可能性で取り出されたはずだ。
  - したがって、HHである確率は 1/2 だ。
  - なぜこの「論理的推論」が間違いなのか？

4.5 条件つき確率と独立性(10)

- Bayesの定理による解答
  - 記号
    - H_1 = {取り出したコインがHH}
    - H_2 = {取り出したコインがHT}
    - H_3 = {取り出したコインがTT}
    - A = {片面が表の刻印}
  - 利用可能な条件
    - $\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(H_2) = \mathrm{P}(H_3) = 1/3$（どれも同じ確率で取り出される）
    - $\mathrm{P}(A| H_1) = 1$（コインHH を取ったら、必ず表が見える）
    - $\mathrm{P}(A| H_2) = 1/2$（コインHT を取ったら、表が見える確率は1/2）
    - $\mathrm{P}(A| H_3) = 0$（コインTT を取ったら、絶対に表は見えない）

4.5 条件つき確率と独立性(11)

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) + P(H_3)P(A \mid H_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0}$$

$$= \frac{2}{3}$$

4.5 条件つき確率と独立性(12)

- 先の「論理的推論」の陥った落とし穴は何か？