統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第4回
西郷 浩

本日の目標

- 第6章 確率分布
  - 離散型確率変数の確率分布の代表例
    - 二項分布
    - ポアソン分布
  - 連続型確率変数の確率分布の代表例
    - 正規分布
- 学習に当たっての注意
  - ユーザーの立場からすれば、
    - 数学的な導出の過程はそれほど重視しなくて良い。
    - 「便利な性質が知られている」という事実が重要である。

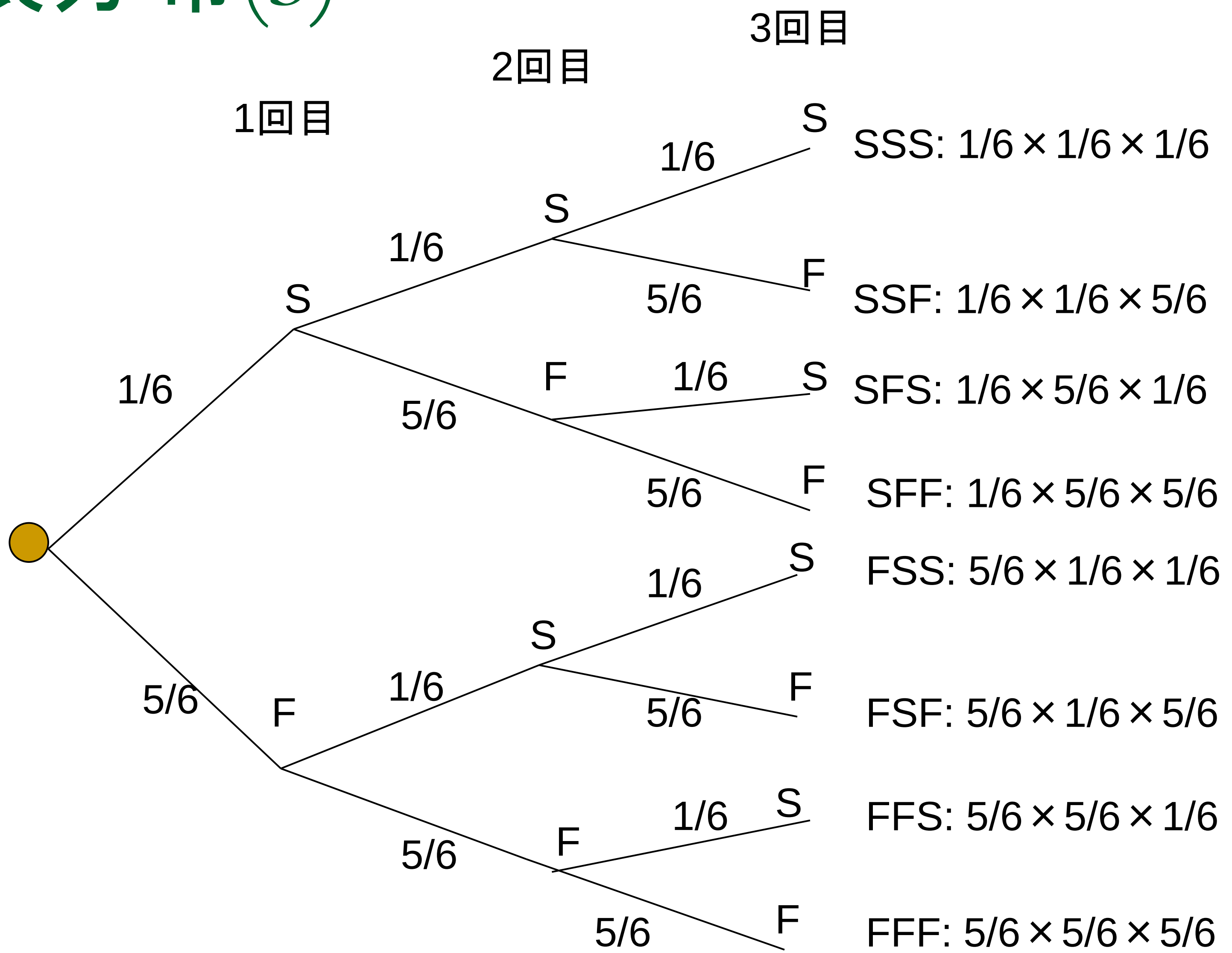
二項分布(1)

- ベルヌーイ試行
  - 試行の結果: (S, F)　2値
  - 発生確率:一定
    - P({Sが発生する})=p; P({Fが発生する})=1-p
  - 例:ひとつのサイコロを振る:
    - S={1の目が出る}, F={それ以外の目が出る}
- 独立試行
  - 複数の試行において、試行の結果が相互に独立。
    - 例:P({S@試行2}|{S@試行1}) = P({S@試行2})

二項分布(2)

- 二項分布
  - X = (n 回の独立ベルヌーイ試行において、Sが発生する回数)
  - 確率変数 X の確率分布は？
- 考察を具体化するために
  - X = (3 回サイコロを振って、1の目が出た回数）として、P(X=1)=f(1) を求めてみる。
  - 考察の方針
    - まず、樹形図で確率を計算し、それを眺めて体系的な計算方法を考える。

二項分布(3)


1回目
2回目
3回目
1/6
5/6
S
F
1/6
5/6
1/6
5/6
S
F
S
F
1/6
5/6
1/6
5/6
1/6
5/6
1/6
5/6
S
F
S
F
S
F
S
F
SSS: 1/6×1/6×1/6
SSF: 1/6×1/6×5/6
SFS: 1/6×5/6×1/6
SFF: 1/6×5/6×5/6
FSS: 5/6×1/6×1/6
FSF: 5/6×1/6×5/6
FFS: 5/6×5/6×1/6
FFF: 5/6×5/6×5/6

二項分布(4)

- $f(1) = P(X=1)$
  = P({SFFが発生}∪{FSFが発生} ∪{FFSが発生})
  =P({SFFが発生})+P({FSFが発生})+P({FFSが発生})
  $=1/6 \times 5/6 \times 5/6 + 5/6 \times 1/6 \times 5/6 + 5/6 \times 5/6 \times 1/6$
  $= 3 \times (1/6 \times 5/6 \times 5/6)$
  =(3回の試行のうちSが1回生じるパターンの数）
  　×(おのおののパターンが生じる確率）
  =(3つの番号札から1枚取ってくる組み合わせの数）
  　×(おのおののパターンが生じる確率）
- この考え方は一般化できる。

二項分布(5)

- 一般の場合
  - X = (n 回の独立ベルヌーイ試行において、Sが発生する回数)
  - f(x) = P(X = x) （確率変数 X が、ある値 x をとる確率）
    = P(n 回の独立ベルヌーイ試行において、Sが x 回発生する)
    =(n の試行のうち x 回のSが生じるパターンの数)
    ×(おのおののパターンの発生確率)
    =(n 枚の番号札から x 枚とってくる組み合わせの数)
    ×(おのおののパターンの発生確率)
    $= {}_nC_x\, p^x\, (1 - p)^{n-x}$

二項分布(6)

- ${}_{n}C_{x} = n!/\{x!\,(n-x)!\}$　ただし、$n! = n(n-1)\ldots2\times1$
  - 公式そのものではなくて、「組み合わせの数は計算できる」という事実が重要である。
- 二項分布にしたがう確率変数 X の性質

$$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} {}_{n}C_{x}\, p^{x}(1-p)^{n-x} = \{p+(1-p)\}^{n} = 1$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

二項分布(7)

- 例
  - 不良品率が 0.005 であるような製造工程で、1日に2000個の製品を作っているとする。
    - 1日の不良品数の期待値は？
    - 1日の不良品数が2以下である確率は？
  - 解答
    - S（成功!）が発生する確率を 0.005 とする独立ベルヌーイ試行が2000回おこなわれると考える。X を不良品数とする。
    - $E(X) = 2000 \times 0.005 = 10$
    - $P(X \leqq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$
      $= 1 \times (1-0.005)^{2000} + 2000 \times 0.005 \times (1-0.005)^{1999}$
      $+ 1999000 \times 0.005^{2} \times (1-0.005)^{1998} = 0.002724205$

ポアソン分布(1)

- 独立なベルヌーイ試行において
  - n が非常に大きい。
  - Sの発生確率 p が非常に小さい。
  - $np \to \lambda$（$n \to \infty$のとき）
  - このとき、Sの発生回数 X の確率分布 f(x) はポアソン分布にしたがう。
    - $f(x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$
  - 例：事故の発生件数

ポアソン分布(2)

- ポアソン分布にしたがう確率変数 X の性質

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^x / x! = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x / x! = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, f(x) = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{x-1} / (x-1)! = \lambda$$

$$E\{X(X-1)\} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, f(x) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\, f(x) = \lambda^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = E\{X(X-1)\} + E(X) - \{E(X)\}^2 = \lambda$$

- ポアソン分布の適用例
  - 教科書 表6.2-6.5（p. 116）

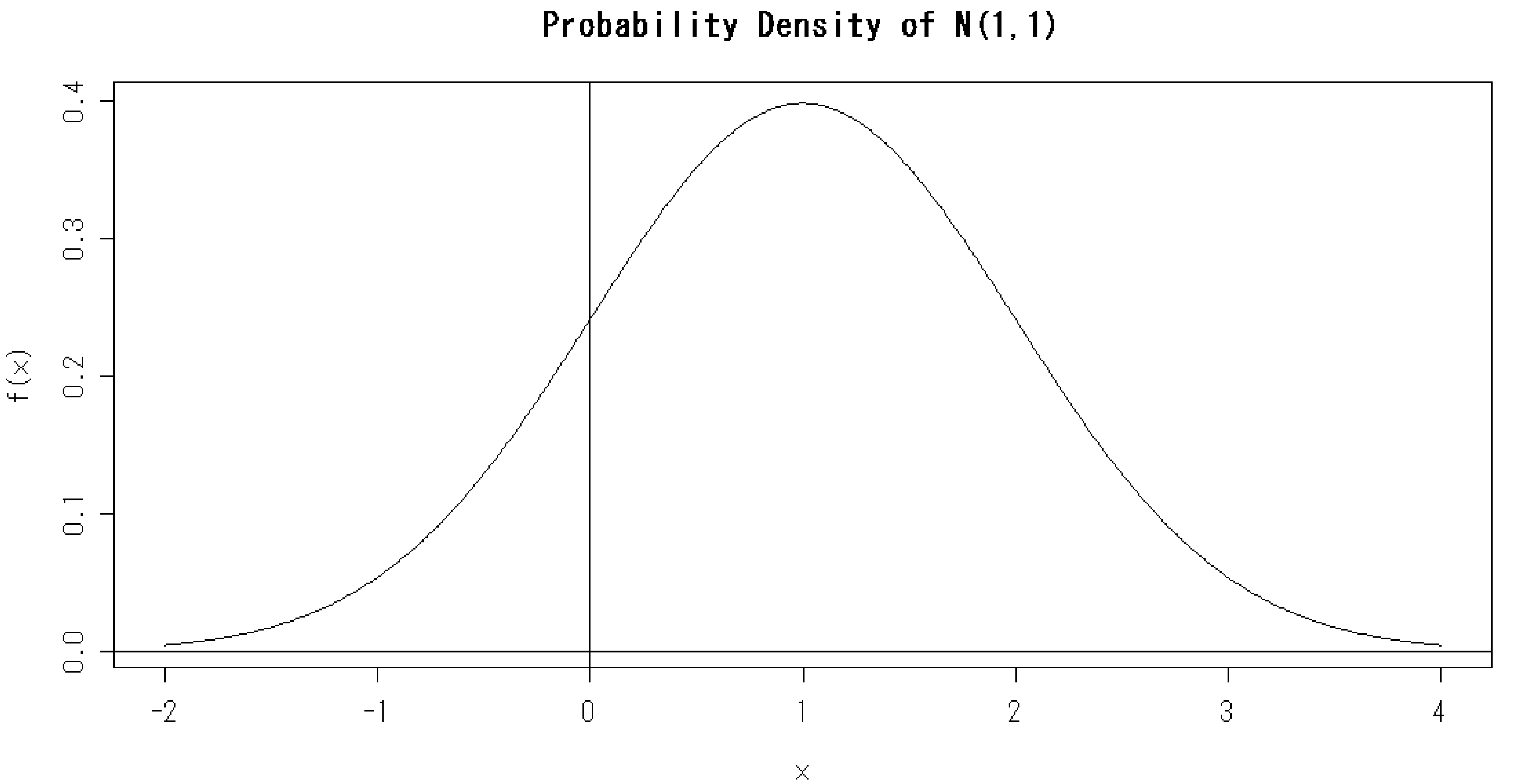
正規分布(1)

- 正規分布にしたがう 確率変数 *X* の確率分布

$$P(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{du} = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{du}$$

- 正規分布の密度関数 f(*x*) の形状
  - x = μ を中心とした左右対称の釣鐘型の分布
- 正規分布の表記
  - 2つのパラメータ μ, σ^2 が決まれば一意に決まる。
    - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表記することが多い。

正規分布(2)



正規分布(3)

- X～N(μ,σ²) である確率変数 X の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{d}u = 1$$

$$E(X) = \mu \quad (\mu\text{は期待値に等しい})$$

$$V(X) = \sigma^2 \quad (\sigma^2\text{は分散に等しい})$$

$$Y = aX + b \rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\text{とくに}\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad (\text{標準正規分布})$$

正規分布(4)

- Z ～ N(0,1) の（累積）分布関数

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

  - 教科書(p.280) は上側確率 1-Φ(z) を掲載している。
- 覚えておくと便利（教科書の pp. 121-122 も参照）

$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ のとき、

$$P\left(\mu-1.96\sigma \le X \le \mu+1.96\sigma\right)=0.95$$

$$P\left(\mu-1.645\sigma \le X\right)=P\left(X \le \mu+1.645\sigma\right)=0.95$$

正規分布(5)

- 例:
  - Aさんの通学時間(分)は期待値60、分散100の正規分布にしたがうという。最初の講義の開始時間までに間に合う確率を0.95にするためには、講義開始時間の何分前に家を出る必要があるか。
  - 考え方の整理
    - Aさんは a 分前に家を出たとする。
    - 実際の通学時間を X とすれば、$X \sim N(60, 100)$
    - $X \leqq a$ であれば間に合うことになる。
    - $P(X \leqq a) = 0.95$ となる a を求めればよい。

正規分布(6)

$$P(X \le a) = P\left(\frac{X-60}{10} \le \frac{a-60}{10}\right)$$

$\dfrac{X-60}{10} \sim N(0,1)$なので

$$P\left(\frac{X-60}{10} \le 1.645\right) = 0.95$$

したがって、

$$\frac{a-60}{10} = 1.645 \Leftrightarrow a = 60 + 1.645 \times 10 = 76.45$$

練習問題 (1)

- 二項分布（2番はベイズの定理を使う）
  - 2つの壷（外見では区別できない）がある。
    - 壷Aには赤玉70個と白球30個
    - 壷Bには赤玉30個と白球70個
  - 最初に壷をひとつ選ぶ（どちらかはわからない）。
  - 「壷からひとつ玉を取り出す→色を記録する→玉をもどす」という実験を12回繰り返した。
  - 結果は、赤8回・白4回であった。
  - 問題
    1. 「最初に選んだ壷がAである」という条件のもとで「赤8回・白4回観察される」という事象が発生する確率を求めよ。
    2. 「赤8回・白4回観察される」という条件のもとで、取り出した壷がAである確率を求めよ。

練習問題 (2)

- 正規分布
  - 次の講義の教室の移動時間（分）X が、平均8、分散1の正規分布にしたがうとする。休み時間を10分とする。
    1. 前の講義が時間通りに終わった場合、次の講義の開始時間までに教室に到着できる確率を求めよ。
    2. 前の講義が4分延長された場合、次の講義に遅刻する確率を求めよ。ただし、次の講義は刻限に始まるとする。
    3. 次の講義の開始時間に間に合う確率を0.99とするためには、前の講義の延長は何分までにすべきか。
    4. 全学的な規則の変更で休み時間が15分になったとする。上の1の答えはどのように変わるか。