統計学 01

早稲田大学政治経済学部

第11回

西郷 浩

本日の目標

- 推定
  - 統計的推定とは何か
    - 標本から母数について推定すること。
  - 推定の区別
    - 点推定
    - 区間推定
    - 点推定の仕組み → 区間推定の仕組み

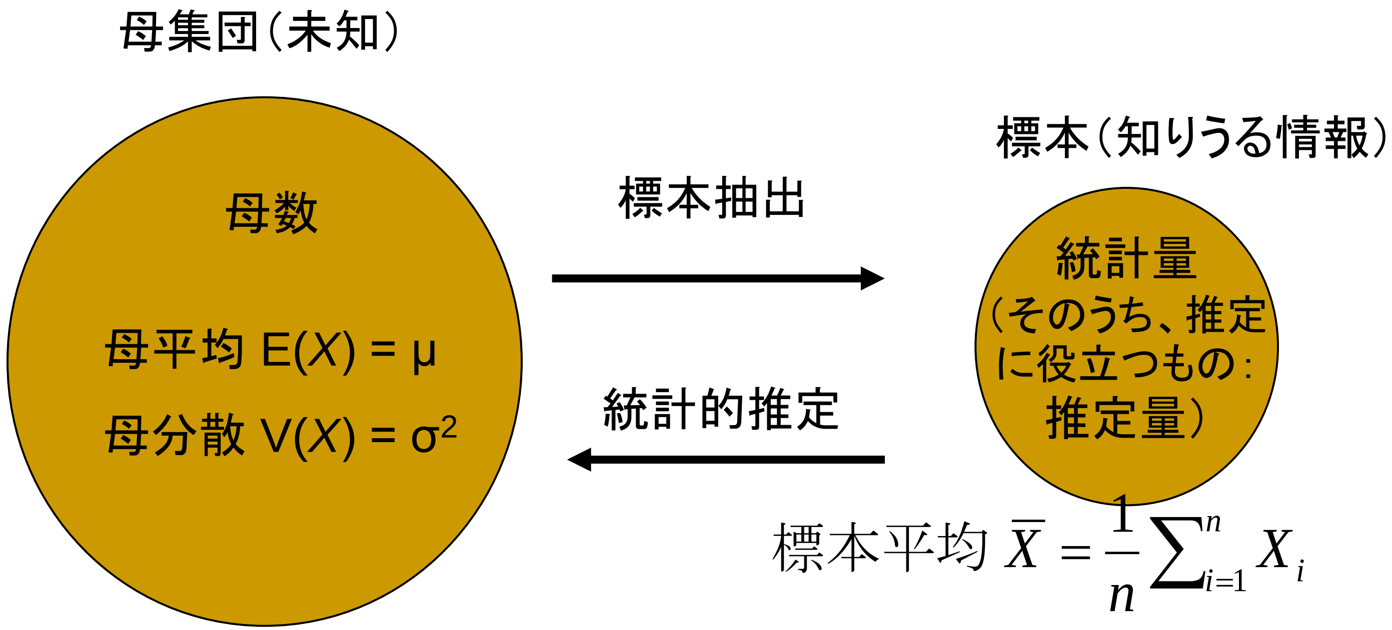
      ↑

      統計量の標本分布

      （とくに、正規母集団からの標本、中心極限定理）

統計的推定とは何か

- 母集団と母数・標本と統計量



標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$

点推定と区間推定

- 推定方法の種別
  - 点推定:
    - 母数をひとつの値（点）で推定すること。

$$母平均\mu の点推定量：\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$母数\theta の点推定量：\hat{\theta} = g\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$$

  - 区間推定:
    - 母数の存在範囲（区間）を推定すること。

$$母平均\mu の区間推定:(L, U)ただし、P(L \le \mu \le U) \ge 1-\alpha$$

$$母数\theta の区間推定:(L, U)ただし、P(L \le \theta \le U) \ge 1-\alpha$$

点推定(1)

- 点推定についての説明の進め方
  - 点推定量に望まれる性質(11.3)
  - 点推定量導出の手続き(11.2)
  - 主要な結論:
    - 母平均の点推定量として、標本平均が「ある種の合理性」を備えている。
      → 母平均の点推定には標本平均を使う。

点推定(2)

- 推定量と推定値
  - 推定量:母数推定のための算式そのもの
  - 推定値:観察値を算式(推定量)に代入して求めた値
  - 例:母平均μについて、

$$\text{母平均の推定量}:\hat{\mu}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad \left(X_i:\text{これから観察する値}\right)$$

$$\text{母平均の推定値}:\hat{\mu}_{\mathrm{obs}}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \left(x_i:\text{すでに観察した値}\right)$$

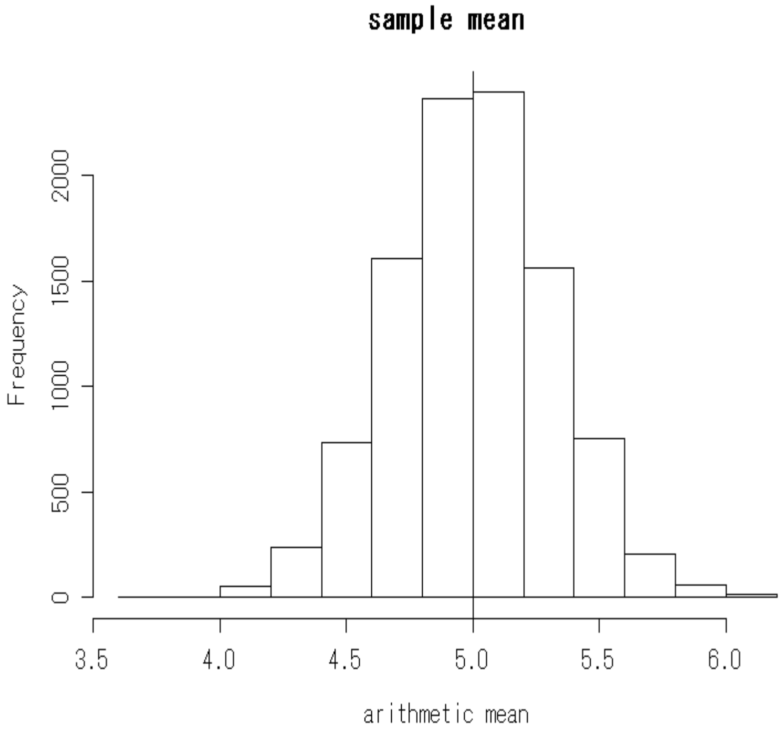
点推定量に望まれる性質(1)

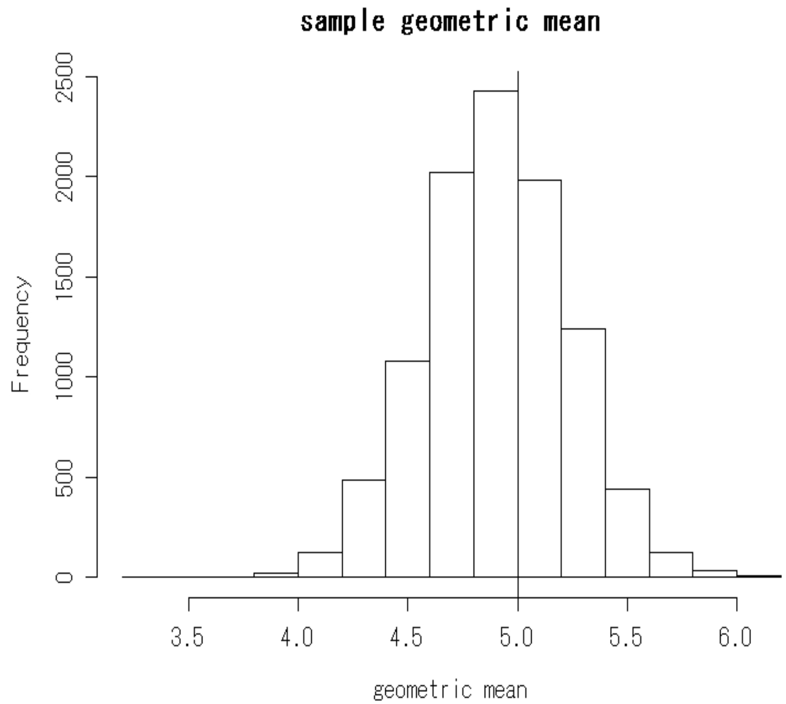
- 不偏性 unbiasedness $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$
  - 確率変数である推定量 $\hat{\theta}$ の期待値（平均的な値）が、ターゲットにしている母数θに等しい。
    - 推定量 $\hat{\theta}$ は、ターゲットにしている母数θよりも大きくなったり小さくなったりする（確率的に変動する）。
    - しかし、「母集団から標本を抽出して標本平均を求める」という作業を何度も繰り返せば、ターゲットにしている母数θよりも大きくなる場合と小さくなる場合とが、同じぐらいの乖離・頻度で出現する（つまり、$\hat{\theta}$ の平均的な値は母数θに等しい）。
  - 不偏性を持つ場合と持たない場合の例:

点推定量に望まれる性質(2)

図1:正規母集団からの標本抽出における標本平均と標本幾何平均の標本分布

$X_i \sim N(5,1)$ (i=1,2,…,10) 標本抽出は10000回おこなった。





点推定量に望まれる性質(3)

- 一致性 consistency

任意の$\varepsilon > 0$に対し、$P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$

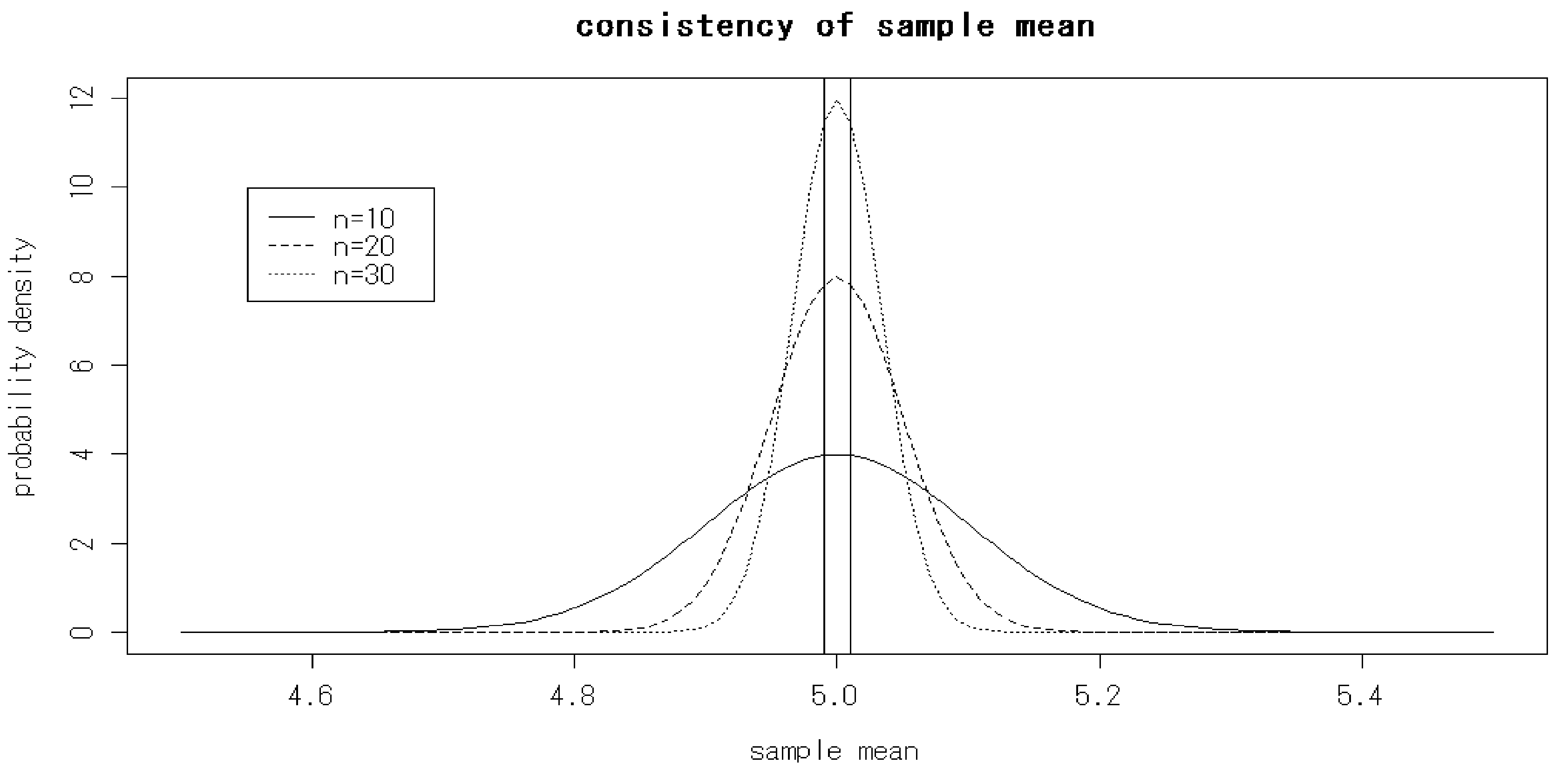
$$\Leftrightarrow P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| \leq \varepsilon\right) \to 1 \quad (n \to \infty)$$

- どのようにεを（プラスの範囲で）小さくしても、推定量$\hat{\theta}$がターゲットにしている母数θの±εの範囲に出現する確率は、サンプルサイズ *n* の増加にともなって、いくらでも1に近づく。
  - サンプルサイズを大きくするほどターゲットにしている母数θの近辺に推定量　$\hat{\theta}$が出現する可能性が高い。

点推定量に望まれる性質(4)

図2:標本平均の一致性

X_i ～N(5,1) (i=1,2,…,n) n=10, 20, 30 の場合の標本平均の標本分布



点推定量に望まれる性質(5)

- 漸近正規性 asymptotic normality

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} \xrightarrow[D]{} N(0,1)$$

  - サンプルサイズ *n* が大きくなるにつれて、推定量 $\hat{\theta}$ の標本分布が正規分布に近づいていく。
    - つまり、*n* がある程度大きければ、正規分布を基準にして推論を進めることができる。
  - 標本平均 $\overline{X}$ の標本分布は、
    - 厳密に正規分布（母集団＝正規分布）
    - 近似的に正規分布（母集団＝非正規、中心極限定理）

点推定量に望まれる性質(6)

- 有効性 efficiency
  - 複数の（不偏な）推定量が考えられるとき、その中で分散が最小であるものが望ましい。
- 漸近有効性 asymptotic efficiency
  - 複数の（漸近正規性を持つ）推定量が考えられるとき、その中で、サンプルサイズ n が十分大きいときの分散（漸近分散）が最小であるものが望ましい。
  - 最尤法（後述）によってえられる推定量は、漸近有効性を持つ場合が多い。
    - 最尤法が推定論で重視される根拠のひとつ。

点推定量に望まれる性質(7)

標本平均 $\bar{X}$ は、母平均$\mu = E(X_i)$の推定量として、

不偏性：$E(\bar{X}) = \mu$

一致性：$P(|\bar{X} - \mu| \le \varepsilon) \to 1\,(n \to \infty)$　大数の法則

（漸近）有効性：$\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{V(\bar{X})}} \begin{cases} \sim N(0,1) & \text{if 正規母集団} \\ \xrightarrow[D]{} N(0,1) & \text{if 非正規母集団} \end{cases}$

を備えている。

つまり：

標本平均 $\bar{X}$ は、母平均 μ の合理的な推定量である。

点推定量導出のための手続き(1)

- モーメント法 moment method
  - 母数が、母集団におけるモーメントを使って表現できるとする。
    - 例: 母平均：$\mu = E(X) = (1次のモーメント)$

      母分散：$\sigma^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2$
  - 母集団におけるモーメントに、標本におけるモーメントを代入して、母数の推定量とする。
    - 例: 母平均の推定量：$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

      母分散の推定量：$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

点推定量導出のための手続き(2)

- 最尤法 Maximum Likelihood Method
  - 尤度関数（(同時)確率(密度)関数を、母数を変数とする関数とみなしたもの）を最大にするような母数を、母数の推定値とみなす方法
    - 「尤度関数が最大⇔尤度関数の対数値が最大」であることを利用し、対数尤度最大化によって求めることが多い。
    - 「尤度を最大化すること自体に意味がある」と考えるよりも、「尤度を最大化する手続きによって、好ましい性質を備えた推定量がえられる」という実際的な利点を重視する。
    - 多くの場合、最尤法によってえられる推定量は、漸近有効性を備えている。

点推定量導出のための手続き(3)

$X_i \sim N(\mu, 1)\quad (i=1,2)$のとき、観察値が$(x_1, x_2)=(2, 4)$
であったとする。

(X_1, X_2)の同時確率密度関数は

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2}{2}}$$

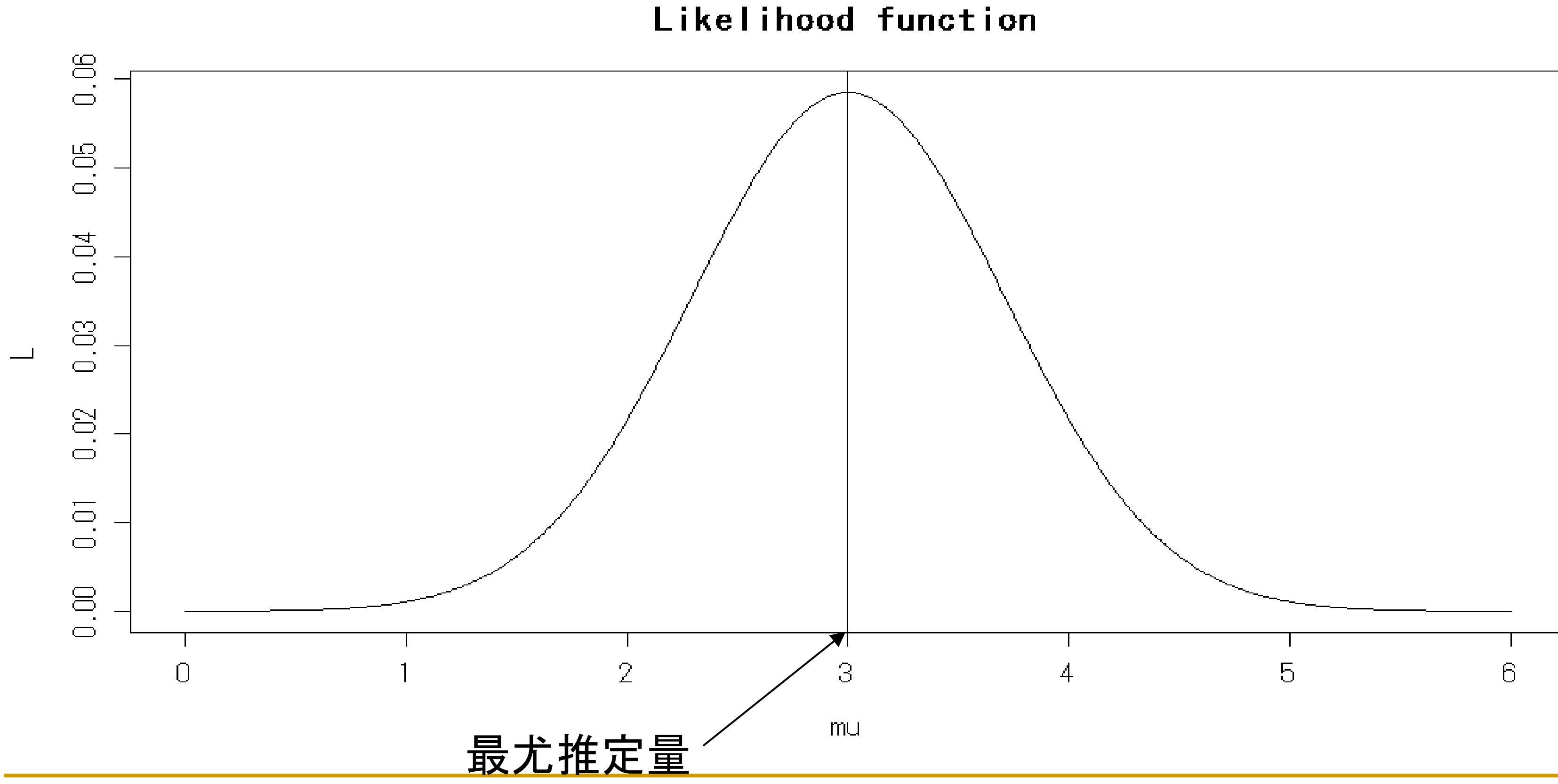
f に観察値を代入して、結果をμの関数とみれば、

$$L(\mu) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(2-\mu)^2+(4-\mu)^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2(\mu-3)^2+2}{2}}$$

この関数は $\mu = 3$ で最大になるので、最尤推定量 $\tilde{\mu} = 3 = \overline{X}$

点推定量導出のための手続き(4)

図3：尤度関数と最尤推定量



点推定量導出のための手続き(5)

- 多くの場合に、母平均の最尤推定量が標本平均であたえられる。
  - 教科書 pp. 223-224.
- 要は:
  - 標本平均は、(漸近有効性をもつ)最尤推定量となっていることが多い。また、標本平均の性質(標本平均の標本分布から導かれる性質)を調べてみると、(漸近有効性以外の)不偏性・一致性をもっていることが多い。したがって、母平均の推定を標本平均にもとづいておこなうことに、ある種の合理性がある。

点推定から区間推定へ(1)

- （母平均の点推定量として）標本平均がもつ好ましい性質

↑

標本平均の標本分布

（標本抽出に付随する標本平均の確率分布）

- つまり、「標本平均の確率的な出方全体（標本分布）」と母数とが関連付けられている。
- 区間推定では、この関連付けを利用する。
  - 点推定と同じく、区間推定でも標本平均の標本分布の性質が本質的な役割を果たす。

点推定から区間推定へ(2)

- 次回までに、第7回スライドを復習
  - 「標本平均の標本分布」とそもそも何だったか。
  - 「標本平均の標本分布」の図式（13枚目のスライド）が頭の中に想起できるように。