統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第14回
西郷 浩

本日の目標

- （統計的）仮説検定の考え方
- 二種類の過誤
- 仮説検定の方式
  - 単純帰無仮説 vs 単純対立仮説
  - その他の発展は次回以降

統計的仮説検定の考え方(1)

- 日常的な判断(作り話)
  - 友人とジャンケン(偶然が支配する勝負事)をした。
  - 相手が立て続けに10回勝った。
  - 「何かおかしい」(例:相手が自分のジャンケンのクセを見抜いていて、次に何を出すかが予見できる)と感じた。
- なぜ「何かおかしい」と感じるのか。
  - 「相手が立て続けに10回勝つ」ことは不可能ではない。
  - にもかかわらず、相手を疑うことが「自然だ」と感じる。
  - こうした判断の「合理性」を筋道立てて考えてみる。

統計的仮説検定の考え方(2)

- 先の判断の流れ
  1. 作業仮説：
     - 「相手も自分も同一の条件でジャンケンをしており、勝敗の可能性は五分五分だ」とする。
       - 真偽不明ながら、考察を進めるため、仮に正しいとする条件。
  2. 「作業仮説が正しい」とすると、「相手が立て続けに10回勝つこと」（実際に発生した現象）は滅多に起こらない。
  3. 2つの選択肢
     - 作業仮説を肯定（滅多にないことが実際に発生した）。
     - 作業仮説を否定（現実的でない）。

統計的仮説検定の考え方(3)

- 統計的仮説検定の流れ
  1. 仮説の設定
     - 帰無仮説：仮に正しいと考える仮設（作業仮説）
     - 対立仮説：帰無仮説が成り立たないときに成り立つ仮説
       - alternative hypothesis
  2. 帰無仮説のもとで、観察された現象がどのくらいの確率で生じるのかを計算する。
  3. 上の計算にもとづく確率的な判断
     - 確率が小 ⇒ 帰無仮説を棄却（否定）=対立仮説受容
     - 確率が大 ⇒ 帰無仮説を受容（棄却しない）=対立仮説棄却

二種類の過誤 (1)

- 例（ホーエル p. 158）
  - これまでに発掘された頭蓋骨の分類
    - 人種Aの頭蓋骨の長さ:

      $\mu = 190\text{mm}, \sigma^2 = 8^2$
    - 人種Bの頭蓋骨の長さ:

      $\mu = 196\text{mm}, \sigma^2 = 8^2$
  - 新たに発見した12個の頭蓋骨（同一の人種とする）

    標本平均 =194mm

二種類の過誤(2)

- 観察値（標本平均 194mm）に照らして、人種Aと人種Bのどちらに分類すべきか？
  - 人種Aよりも人種Bの方が、母平均が大きい。⇒「12個の頭蓋骨が人種Aに属する」場合の標本平均よりも、「12個の頭蓋骨が人種Bに属する」場合の標本平均の方が大きくなりやすい。
  - 判断基準：
    - 標本平均が小さめ⇒「人種Aに属する」
    - 標本平均が大きめ⇒「人種Bに属する」

二種類の過誤(3)

- では、標本平均がどれぐらい大きければ、人種Bと判断すればよいか？
  - 例における 標本平均 = 194mm は、人種Bの母平均 196mm に相対的に近い。
  - けれども、そのことから、「人種Bに属する」と判断していいだろうか？
  - 人種Aに属しているとしても、「標本平均が194mm（以上）になる確率が、それほど低くない」ということがありえないか？

二種類の過誤(4)

- 検定における過誤:
  - 検定＝意思決定の問題:
    - 標本に照らして、以下のいずれかを採択
      - 仮説A:「12個の頭蓋骨が人種Aに属する」
      - 仮説B:「12個の頭蓋骨が人種Bに属する」
  - 検定における過誤:
    - 真の状態と採択される仮説との組み合わせで2種類ある。

二種類の過誤(5)

- 単純化
  - 真の状態：AかBかのどちらかが正しい。
  - 意思決定：AかBかのどちらかを採択
- ふたつの過誤を同時に0にすることが可能か？

表1：意思決定と真の状態との組み合わせ

		真の状態	
		仮説Aが真	仮説Bが真
意思決定	仮説A採択	○	過誤(b)
	仮説B採択	過誤(a)	○

二種類の過誤(6)

- No.
  - 理由：
    - 過誤(a)がなるべく起きないようにする。
      ⇔標本平均の値が多少高くても、仮説Aを採択
      ⇔過誤(b)が生じやすくなる。
    - 過誤(b)がなるべく起きないようにする。
      ⇔標本平均の値が多少低くても、仮説Bを採択
      ⇔過誤(a)が生じやすくなる。
    - トレードオフの関係
- どのように解決するか？

二種類の過誤(7)

- 仮説の設定:
  - 帰無仮説:作業仮説(H_0)
    - 例　H_0 :12個の頭蓋骨は人種Aに属する。
  - 対立仮説: H_0に代替する仮説(H_1)
    - 例　H_1: 12個の頭蓋骨は人種Bに属する。

(仮説の区別は、仮説の内容ではなく、検定における役割の相違に応じて定まる。)

二種類の過誤(8)

- 二種類の過誤
  - 第1種の過誤:
    - H_0が正しいときに、H_0を棄却する誤り。
  - 第2種の過誤:
    - H_0が正しくないときに、H_0を採択する誤り（H_1が正しいときに、H_1を否定する誤り）

表2:二種類の過誤

		真の状態	
		H_0が真	H_1が真
意思決定	H_0を採択	○	第2種の過誤
	H_0を棄却	第1種の過誤	○

二種類の過誤(9)

- 二種類の過誤の生じる確率：
  - 第1種の過誤が生じる確率：α
    - H_0が正しいにもかかわらず、それを棄却してしまう確率
  - 第2種の過誤が生じる確率：β
    - H_0が正しくないにもかかわらず、それを採択してしまう確率
      （H_1が正しいにもかかわらず、それを否定してしまう確率）

二種類の過誤(10)

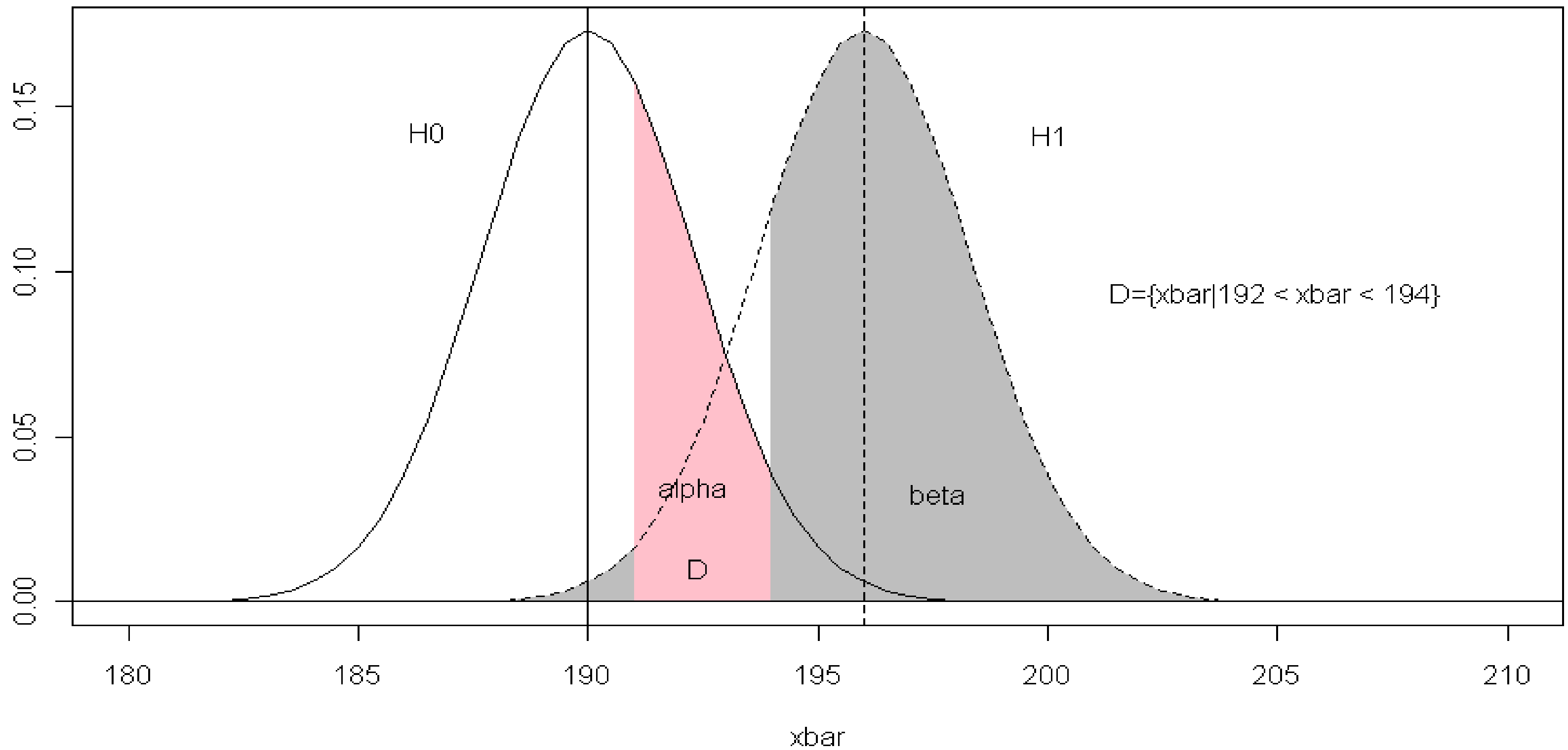
- 母平均に関する検定であるから、標本平均を意思決定のもととすることは自然である。したがって、検定手続きを以下のように定めることにする。
  - 標本平均のある領域*D*（棄却域）に標本平均が出現したら、H_0を棄却する。
  - *D*以外の領域（受容域）に標本平均が出現したら、H_0を受容する。

二種類の過誤(11)

- 棄却域*D*
  - 仮に D = {xbar| 192 < xbar < 194} とした場合（図1）
    - 第1種の過誤が生じる確率α
    - 第2種の過誤が生じる確率β
- αとβとの間のトレードオフ
  - どのように棄却域*D*を定めるのが適当か？

二種類の過誤(12)

図1：第1種の過誤の確率α と第2種の過誤の確率βとの関係



二種類の過誤(13)

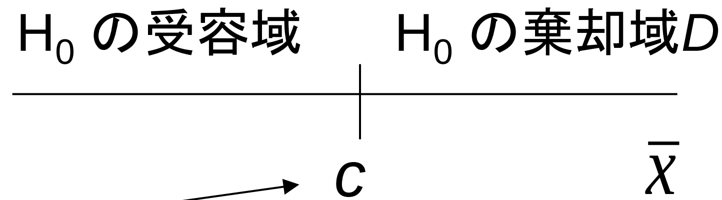
- 棄却域Dの決定
  1. 第1種が生じる確率αを小さい値に定める: 例 α= 0.05 (有意水準とよぶ。)
  2. αの値を一定に保ったままで、第2種の過誤が生じる確率βを最小にする。
  - 頭蓋骨の判定の問題では、この原則によって(最適な)棄却域が一意的に定まる。

二種類の過誤(14)

- 頭蓋骨問題:
  - H_0: μ = 190, σ= 8
  - H_1: μ = 196, σ= 8

H_0を帰無仮説としたときの(最適な)棄却域の型

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} > c\}$$



$$c \quad \text{such that } P\left(\bar{x} > c \mid H_0 \text{が正しい}\right) = \alpha$$

二種類の過誤(15)

- 頭蓋骨問題の場合、H_0が正しいときには、

$$X_i \sim N\left(190, 8^2\right)(i=1,2,\ldots,12) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(190, \frac{8^2}{12}\right)$$

$$\therefore \quad P\left(\bar{X} > c \mid H_0\right) = P\left(\frac{\bar{X}-190}{\sqrt{8^2/12}} > \frac{c-190}{\sqrt{8^2/12}} \middle| H_0\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{c-190}{\sqrt{8^2/12}} \middle| H_0\right) \quad \text{ただし、} Z = \frac{\bar{X}-190}{\sqrt{8^2/12}}$$

二種類の過誤(16)

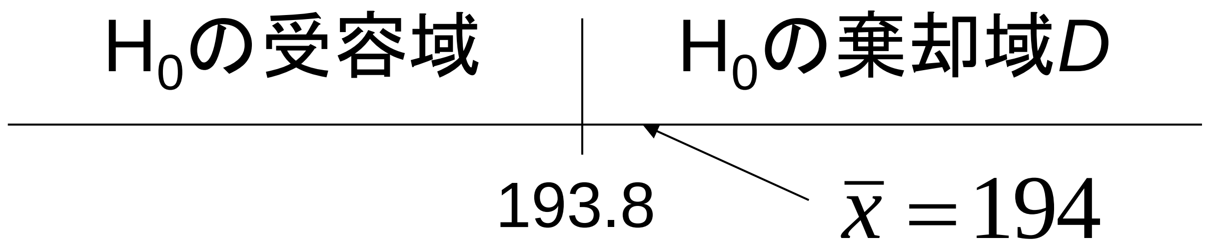
- H$_0$が正しければ、Z ～N(0, 1) なので、
  - P(Z > 1.645) = 0.05 ←正規分布表 p. 280
- したがって、α=0.05 とすれば、

$$P\left(Z > \frac{c-190}{\sqrt{8^2/12}} \middle| H_0 \right) = 0.05 \Rightarrow \frac{c-190}{\sqrt{8^2/12}} = 1.645$$

$$\Leftrightarrow c = 190 + 1.645\sqrt{8^2/12} = 193.8$$

二種類の過誤(17)

- 検定の実行
  - 観察された標本平均:　$\bar{x} = 194$
  - $\bar{x}$ と棄却域Dの関係:



  - H_0を棄却する(H_1を採択する)。
    - つまり、「頭蓋骨は人種Bのものだ」と考える。

母平均の検定(1)

- 母平均の検定1：右側検定
  - 仮説：$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ $i = 1,2,\ldots,n$
    - H_0: $\mu = \mu_0$ （具体的な数値）
    - H_1: $\mu = \mu_1$ （$> \mu_0$, 具体的な数値）
  - 棄却域：

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} > c\} \quad \text{where} \quad P(\bar{x} > c \mid H_0) = \alpha$$

有意水準（通常 0.05）

母平均の検定(2)

- c の決め方：有意水準α=0.05 として、
  - σ^{2}が既知の場合：

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1) \Rightarrow c = \mu_0 + 1.645\sqrt{\sigma^2/n}$$

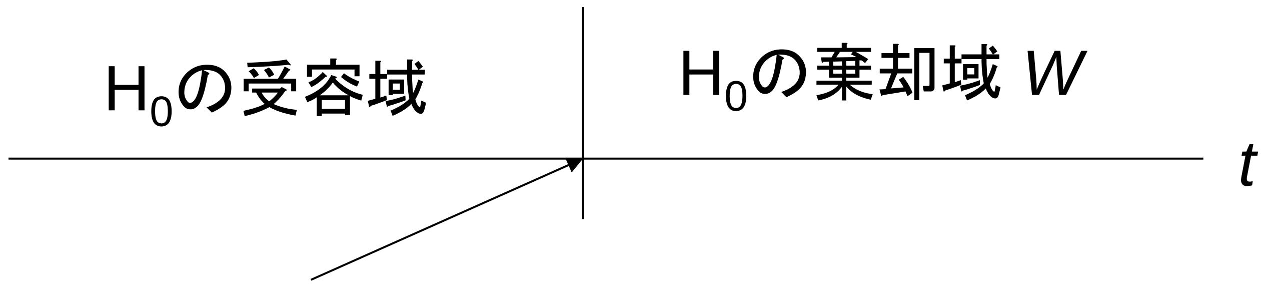
  - σ^{2}が未知の場合（通常の場合）：

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1) \Rightarrow c = \mu_0 + t_{0.05}(n-1)\sqrt{s^2/n}$$

自由度 n -1 の t分布の上側5%点

母平均の検定(3)

- 検定等計量として、$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$ をもちいることも多い。



$t_{0.05}(n\text{-}1)$ = 自由度n -1のt分布の上側5%点

$$\text{棄却域}\ W = \left\{ t \,\middle|\, t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} > t_{0.05}(n-1) \right\}$$

母平均の検定(4)

- 仮説の拡張
  - 仮説が以下のように拡張された。
    - $H_0 : \mu=\mu_0$
    - $H_1 : \mu>\mu_0$

    棄却域*D*（*W*）はどのように変更されるべきか？
  - 仮説が以下のように拡張された。
    - $H_0 : \mu \leqq \mu_0$
    - $H_1 : \mu>\mu_0$

    棄却域*D* （*W*）はどのように変更されるべきか？