統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第15回
西郷 浩

本日の目標

- 母平均の検定
  - 右側検定
    - 仮説の拡張
  - 左側検定
  - 両側検定

母平均の検定(1)

- 右側検定:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1 \ (> \mu_0)$$

有意水準 0.05 の H_0 の棄却域

$$D = \left\{ \bar{x} \middle| \bar{x} > c = \mu_0 + t_{0.05}(n-1)\sqrt{s^2/n} \right\}$$

$$W = \left\{ t \middle| t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} > t_{0.05}(n-1) \right\}$$

自由度 *n*-1
の*t*分布の
上側5%点

母平均の検定(2)

- 仮説の拡張

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

  - たとえば、
    - $H_0 : \mu = 190$（頭蓋骨は人種Aに属する）
    - $H_1 : \mu > 190$（もっと頭蓋骨が大きい人種）

母平均の検定(3)

- H_0の棄却域Dの決定の2原則:
  - 第1種の過誤が生じる確率α:一定
  - 「αが一定」という条件のもとで、第2種の過誤が生じる確率β:最小
- この原則によって、拡張された仮説の組について、棄却域 D が一意的に定まるか?
  - Yes!
  - 棄却域の型が右側
    ←「対立仮説のもとでの標本平均の標本分布が、帰無仮説のそれよりも右側に来る」ため。

母平均の検定(4)

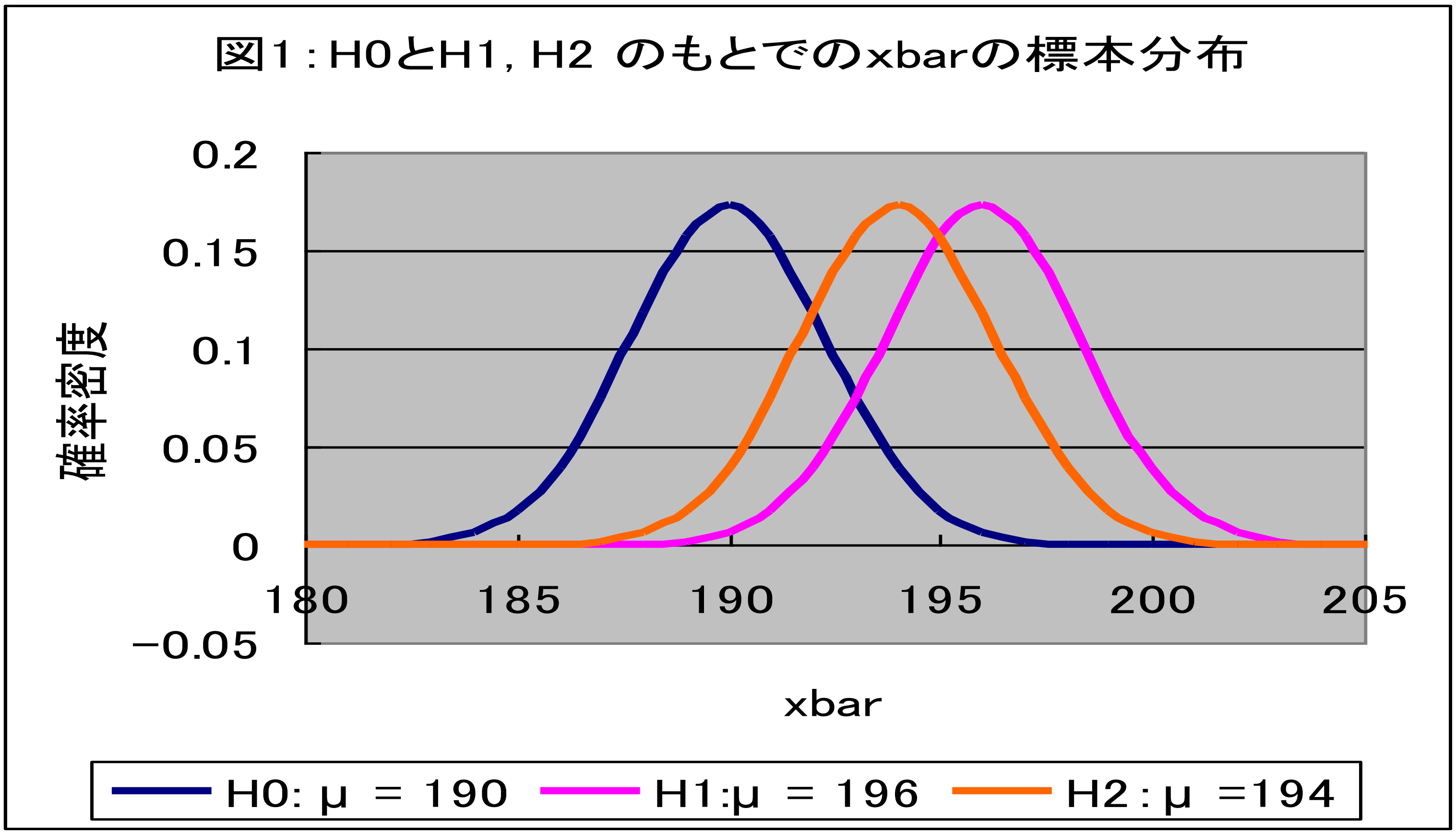


図1：H0とH1, H2 のもとでのxbarの標本分布
確率密度
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
180
185
190
195
200
205
xbar
H0: μ ＝ 190
H1:μ ＝ 196
H2：μ ＝194

母平均の検定(5)

- さらに仮説を拡張する:

$$H_0 : \mu \le \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

  - このときにも、棄却域D は、右側なる。
    理由:
    - H'$_0$: μ=μ$_0$ として、H'$_0$ を H$_1$ に対して検定する。

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} > c\}$$

    - 「H'$_0$ が棄却(否定)されたら、μ$_0$よりも小さい母平均を指定する仮説も否定される」と考える。

母平均の検定(6)

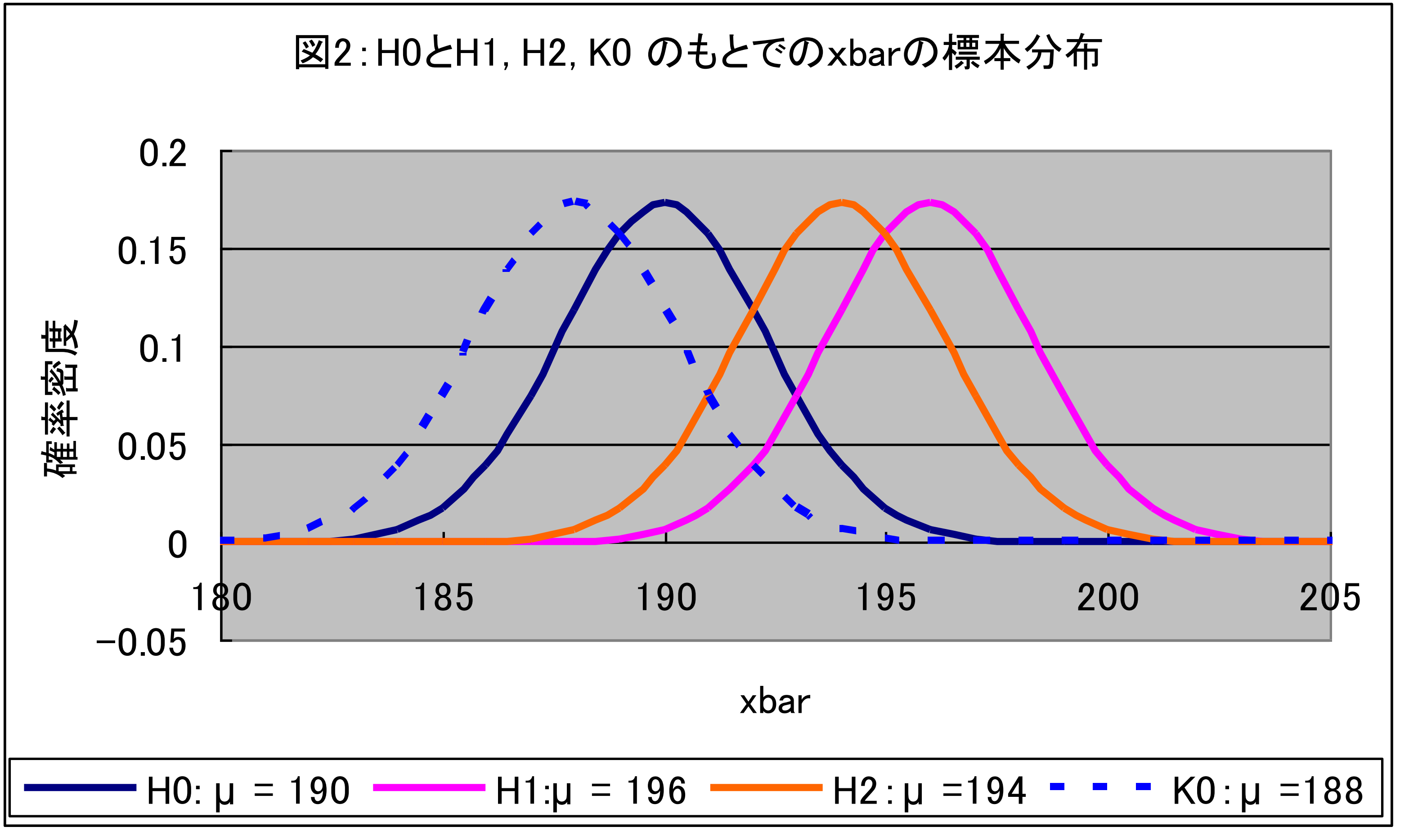


図2：H0とH1, H2, K0 のもとでのxbarの標本分布
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
確率密度
180
185
190
195
200
205
xbar
H0: μ = 190
H1:μ = 196
H2：μ =194
K0：μ =188

母平均の検定(7)

- 右側検定(まとめ):

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \ (> \mu_0) \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

  - 有意水準αのH_0の棄却域

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} > c\} \quad \text{or} \quad W = \{t \mid t > t_\alpha(n-1)\}$$

$$\text{where} \quad c = \mu_0 + t_\alpha(n-1)\sqrt{s^2/n},\ t = (\bar{x} - \mu_0)/\sqrt{s^2/n}$$

$$t_\alpha(n-1) = (\text{自由度}\, n-1 \,\text{の}\, t \,\text{分布の上側}\, 100\alpha\% \,\text{点})$$

母平均の検定(8)

- 左側検定:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \ (< \mu_0) \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

  - 有意水準αのH_0の棄却域

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} < d\} \quad \text{or} \quad W = \{t \mid t < -t_\alpha(n-1)\}$$

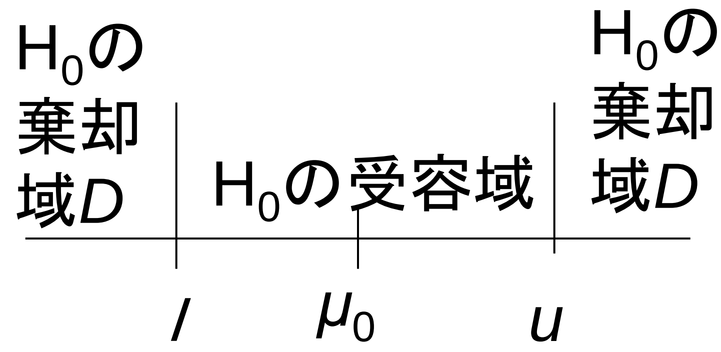
$$\text{where} \quad d = \mu_0 - t_\alpha(n-1)\sqrt{s^2/n}, t = (\bar{x} - \mu_0)\big/\sqrt{s^2/n}$$

$$t_\alpha(n-1) = (\text{自由度}\, n-1 \text{の}\, t \text{分布の上側}100\alpha\%\text{点})$$

母平均の検定(9)

- 両側検定

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$



  - このとき、棄却域は両側になる。

$$D = \{\bar{x} \mid \bar{x} < l, or\ \bar{x} > u\} \quad or \quad W = \{t \mid t < -t_{\alpha/2}(n-1), \text{or } t > t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

$$\text{where} \quad l = \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{s^2/n}, u = \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{s^2/n}, t = (\bar{x} - \mu_0)/\sqrt{s^2/n}$$

$$t_{\alpha/2}(n-1) = (\text{自由度 } n-1 \text{ の } t \text{ 分布の上側} 100(\alpha/2)\% \text{ 点})$$

母平均の検定(10)

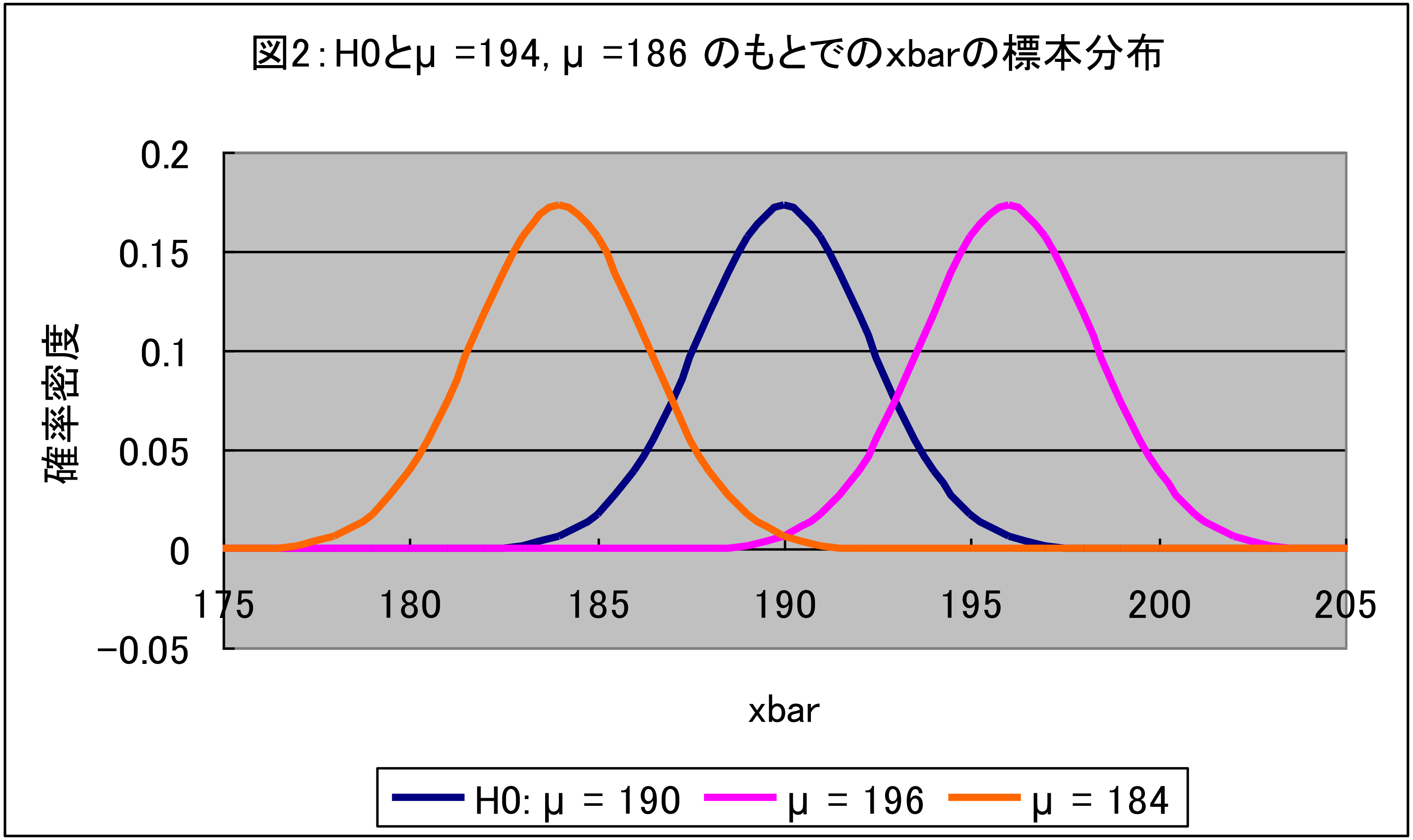


図2：H0とμ =194, μ =186 のもとでのxbarの標本分布
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
確率密度
175
180
185
190
195
200
205
xbar
H0: μ = 190
μ = 196
μ = 184

母平均の検定(11)

- もし:
  - 片側(たとえば右側)にだけ棄却域を設けたとする。
  - その棄却域の反対側に、H_1のもとにおける標本平均の標本分布が出現する可能性もある。
  - そのときは、第2種の過誤の起きる確率βが相当大きくなってしまう。
- H_1のもとでの標本平均の標本分布がどちら側に出現するかはわからない。⇒Dは両側

母平均の検定(12)

- 注:
  もし、
  - σ^2の値が既知である;もしくは
  - n が非常に大きい

  のであれば、t 分布の代わりに、標準正規分布 N(0,1) を利用してよい。

母平均の検定(13)

- 例1（ホーエル p. 163）
  - ある市役所：銘柄Aの電球を使用していた。
    - 銘柄Aの電球の平均寿命は1180時間
    - その母分散$\sigma^2=90^2$
  - 銘柄Bの電球のセールスマンの主張：銘柄Bの電球は銘柄Aの品質に劣らない。
  - 銘柄Bの電球を100個無作為抽出した。
  - 標本平均1140時間であった。

母平均の検定(14)

- セールスマンの主張は正しいか？
- 解答:
  - σ^2の値が既知なので、正規分布を使う。
  - 銘柄Bの電球の（真の）平均寿命:μ
  - 仮説の設定:
    - $H_0: \mu \geqq 1180$
    - $H_1: \mu < 1180$

母平均の検定(15)

- 棄却域Dの決定：有意水準0.05として、

$$D=\left\{\bar{x}\mid \bar{x}<1180-1.645\sqrt{90^2/100}=1165.2\right\}$$

- 検定統計量の観察：

$$\bar{x}=1140$$

- H_0が棄却される。

（銘柄Bの電球の平均寿命は1180よりも短い）

母平均の検定(16)

- 例2（ホーエル p.165）
  - 大学における新入生用の適性検査
  - 過去の経験：平均 = 115, 分散 20^2
  - 今年の新入生名簿から無作為に50人を選んで調べた。標本平均 = 118
  - 「今年の新入生の平均点は、いままでの新入生の平均点と差がある」と判断できるか？

母平均の検定(17)

- 解答:
  - 標本平均の標本分布　$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$
  - 仮説
    - H_0:μ＝115
    - H_1:μ≠115

    「違いがあるか否か」に関心がある。
  - 棄却域の設定:　$D = \left\{\bar{x} \mid \bar{x} < l, \text{ or } \bar{x} > u\right\}$
    - 有意水準0.05として、

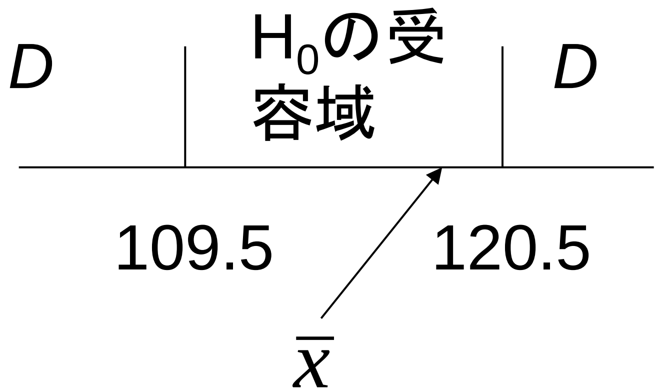
$$l = 115 - 1.96\sqrt{20^2/50} = 109.5$$

$$u = 115 + 1.96\sqrt{20^2/50} = 120.5$$

母平均の検定(18)

- 標本統計量の観察

$$\bar{x} = 118$$



- H_0は棄却されない。
（ H_0は受容される。）
つまり:
「今年の新入生の平均値は、これまでとそれほど違わない」と判断しても、観察された事実と矛盾しない。

母平均の検定(19)

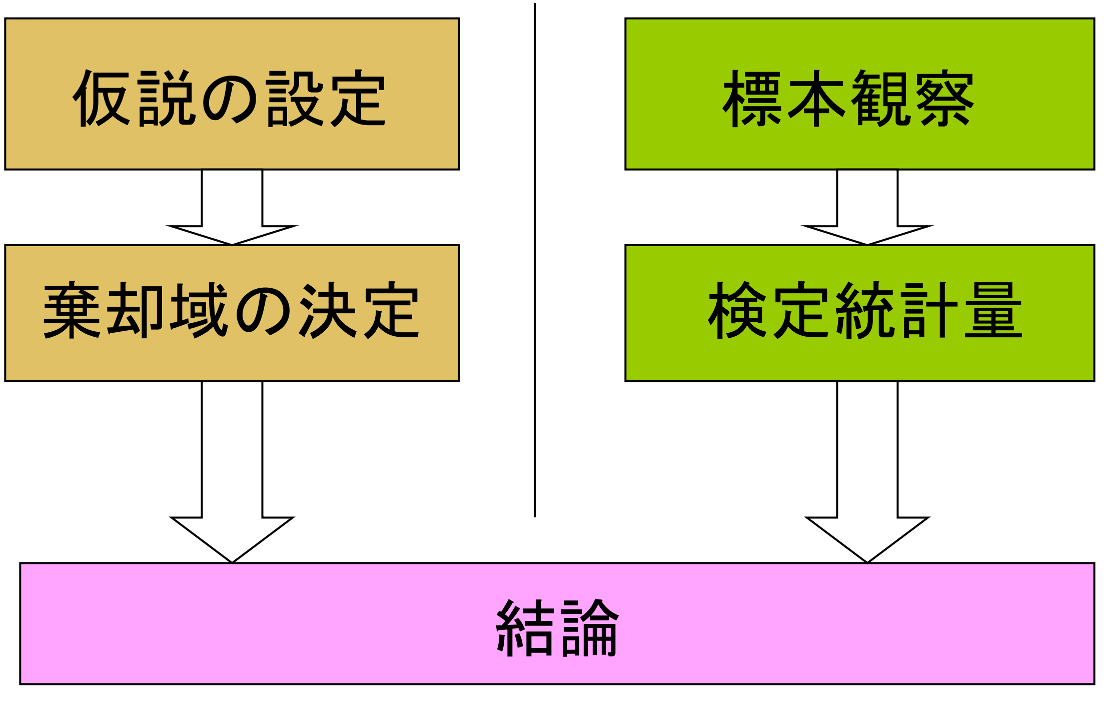
- コメント1：結論の強弱
  - H_0が受容される（H_0が棄却されない）：
    - ＝「H_0が正しいと考えたとしても、観察された事実と矛盾しない」という消極的肯定
（他の仮説の存在まで否定するものではない）
    - ≠「H_0が絶対に正しい」という積極的肯定
  - H_0が棄却される：
    - ＝「H_0が正しいと考えることには（確率的に）無理がある」という積極的否定

母平均の検定(20)

- 結論に強弱の差が生じる。
  ← H_0が仮説検定において果たす役割
  - H_0:帰無仮説
    = 作業仮説(仮に「正しい」と仮定する仮説)
  - 有意水準:
    H_0のもとで、これよりも低い確率でしか生じない現象が観察されたらH_0を棄却する。
  - ⇒よほどおかしい(確率の低い)現象が生じない限り、H_0を受け入れることにする。

母平均の検定(21)

- コメント2：検定手続き



母平均の検定(22)

- 例3（ホーエル pp.167-168）
  - タイルの新製造法
    - タイルの強度を犠牲にせずに、より一様な品質をもたらす。
  - 従来の平均破壊強度：42ポンド
  - 新製造法による50個のタイル：
    - 破壊強度の標本平均=40.7ポンド, $s^2 = 3.5^2$
  - 「強度が落ちた」と判断できるか？

母平均の検定(23)

- 解答:
  - 仮説の設定:
    - H_0: μ≧42
    - H_1: μ<42
  - 棄却域の決定:有意水準0.05として、

$$W = \{t \mid t < -t_{0.05}(50-1)\}$$

$$where \quad t = (\bar{x} - 42) \Big/ \sqrt{s^2/n}\,,\; t_{0.05}(50-1) = 1.677$$

  - 標本から計算した検定統計量:H_0は棄却される。

$$t = (40.7 - 42) \Big/ \sqrt{3.5^2/50} = -2.63 \in W$$