統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第16回
西郷 浩

本日の目標

- 母比率の検定（p. 250）
- 母平均の差の検定（pp. 242-244）
- 母比率の差の検定（教科書に記載なし）
- 小標本における母平均の差の検定（2006年6月30日追加）

母比率の検定 (1)

- 右側検定
  - 仮説:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 (> p_0) \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p \le p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

  - 棄却域D(有意水準α):

$$D = \left\{ \hat{p} \mid \hat{p} > p_0 + z_\alpha \sqrt{p_0(1 - p_0)/n} \right\}$$

$$z_\alpha = (\text{標準正規分布の上側}100\alpha\%\text{点})$$

母比率の検定(2)

- 左側検定
  - 仮説:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 (< p_0) \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

  - 棄却域*D*(有意水準α):

$$D = \left\{ \hat{p} \mid \hat{p} < p_0 - z_\alpha \sqrt{p_0 (1 - p_0)/n} \right\}$$

$$z_\alpha = (\text{標準正規分布の上側}100\alpha\%\text{点})$$

母比率の検定(3)

- 両側検定
  - 仮説:　$H_0 : p = p_0, H_1 : p \neq p_0$
  - 棄却域D(有意水準α):

$$D = \{\hat{p} \mid \hat{p} < l, \text{ or } \hat{p} > u\}$$

$$l = p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

$$u = p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$$

$$z_{\alpha/2} = (\text{標準正規分布の上側}100(\alpha/2)\%\text{点})$$

母比率の検定(4)

- 例1（ホーエル p. 170）
  - メンデルの法則：
    - ある種のエンドウを交配させるとY：G＝3：1
  - 実験の結果（観察値）：
    - Y：G ＝ 176：48 ＝ 3.67：1
    - 試行回数 $n = 176 + 48 = 224$
  - メンデルの法則は成立しないといえるか？

母比率の検定(5)

- 解答:
  - 仮説の設定:
    ただし、p =(Yが出る確率)
    $$\begin{cases} H_0 : p = 3/4 \\ H_1 : p \neq 3/4 \end{cases}$$
  - 棄却域の決定（有意水準0.05）:

$$D = \left\{ \hat{p} \mid \hat{p} < l, \text{ or } \hat{p} > u \right\}$$

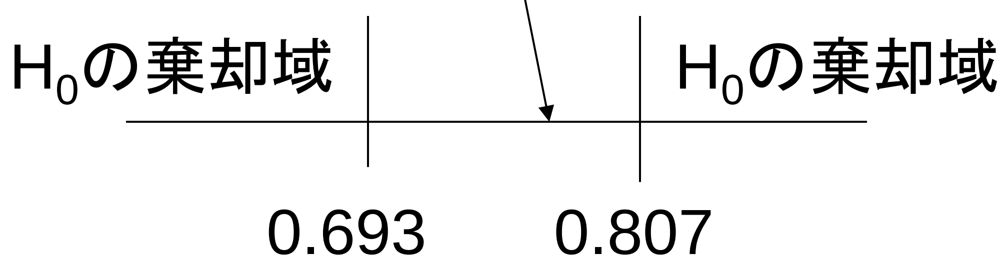
$$l = 3/4 - 1.96\sqrt{(3/4)(1-3/4)/224} = 0.693$$

$$u = 3/4 + 1.96\sqrt{(3/4)(1-3/4)/224} = 0.807$$

母比率の検定(6)

- 検定統計量の観察:

$$\hat{p}_{obs} = 176/224 = 0.79$$



- 検定の結果:H_0は棄却されない。
（メンデルの法則は現実と矛盾しない。）

母比率の検定(7)

- 例3（ホーエル p. 172）：
  - 管理限界：

$$p \pm 3\sigma_{\hat{p}} \quad \left(\sigma_{\hat{p}}^2 = E\left[(\hat{p} - p)^2\right]\right)$$

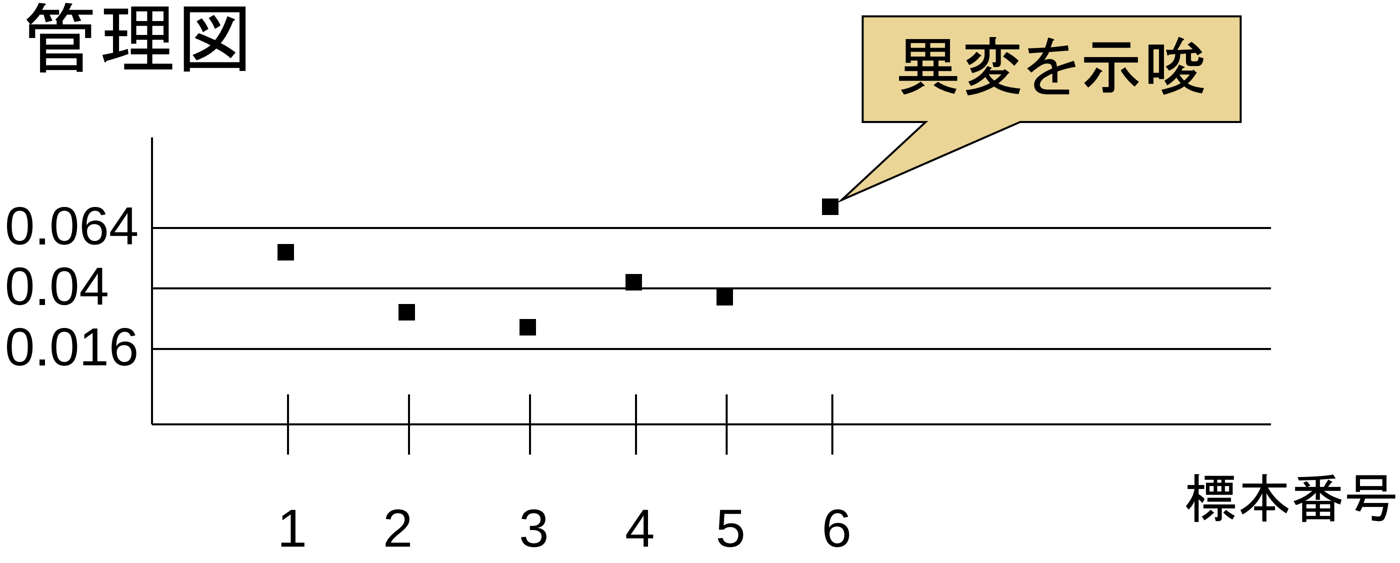
  - 信頼できる（n の大きい）標本から、管理限界を推定する。
  - 製造工程において、$\hat{p}_{obs}$ が管理限界を超えるか否かをチェックする。

母比率の検定(8)

- ミスタイプの管理:
  - タイプを練習している数名の学生を調べたところ、20,000字のうち800字がミスタイプだった。
  - 1時間に約600字を打つ学生がいたとして、1時間以内にタイプミスする字の割合の管理図を作る。
- 解答:
  - 真のミスタイプの割合 $p \fallingdotseq 800/20000 = 0.04$
  - 管理限界:$0.04 \pm 3(0.04 \times 0.96/600)^{1/2} = 0.016, 0.064$

母比率の検定(9)

- 管理図



- 管理図は、標本平均についても作ることができる（例4 ホーエル pp. 168-169）

母平均の差の検定 (1)

- 例（ホーエル p. 172）
  - ふたつの銘柄の電球
    - 電球A：平均寿命 μ_1 ; 分散 σ_1^2
      （いずれの母数も未知）
    - 電球B：平均寿命 μ_2 ; 分散 σ_2^2
      （いずれの母数も未知）
  - μ_1とμ_2 とに差があるが否かを調べたい。

母平均の差の検定(2)

- 検定の方法
  - m 個の電球Aを無作為抽出する。
    標本平均 $\overline{X}$; 標本分散 s_1^2
  - n 個の電球Bを無作為抽出する。
    標本平均 $\overline{Y}$; 標本分散 s_2^2

（ふたつの標本平均が独立になることに注意）

  - このとき:

$$\overline{X} - \overline{Y} \xrightarrow[D]{} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n} \right)$$

母平均の差の検定(3)

- このことから、たとえば「平均値に差があるかどうか」を検定するには:
  - 仮説の設定: $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \Leftrightarrow \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
  - 棄却域:有意水準α

$$D = \{\bar{x} - \bar{y} \mid \bar{x} - \bar{y} < l, or\ \bar{x} - \bar{y} > u\}$$

$$l = 0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}$$

$$u = 0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}$$

$$z_{\alpha/2} = \left(N(0,1)\text{の上側}100(\alpha/2)\%\text{点}\right)$$

母平均の差の検定(4)

- 未知の母分散：σ_1^2, σ_2^2
  - m と n がともに(25より)大きいときには、標本分散が母分散に近いと考えて、それらを代入する。

$$\sigma_1^2 \fallingdotseq s_1^2,\ \sigma_2^2 \fallingdotseq s_2^2$$

- 検定統計量を観察して、帰無仮説 H_0 の採否を判定する。

母平均の差の検定(4)

- 設問
  - 電球Aの無作為標本（大きさ m=100）
    - 標本平均 1160、標本分散 90^2
  - 電球Bの無作為標本（大きさ n=100）
    - 標本平均 1140、標本分散 80^2
- 解答
  - 仮説の設定：
    - $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
    - $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

母平均の差の検定(5)

- 棄却域の決定:有意水準 0.05

$$D=\{\bar{x}_1-\bar{x}_2 \mid \bar{x}_1-\bar{x}_2<l,\ \text{or}\ \bar{x}_1-\bar{x}_2>u\}$$

$$l=0-1.96\sqrt{\frac{90^2}{100}+\frac{80^2}{100}}=-24,\ u=24$$

$$\sigma_1^2 \doteq s_1^2=90^2,\ \sigma_2^2 \doteq s_2^2=80^2$$

- 観察された検定統計量:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)_{obs}=1160-1140=20 \notin D$$

- H_0 は棄却されない(平均寿命に差はない)。

母平均の差の検定(6)

- 片側検定($H_0:\mu_1 \leqq \mu_2$; or $H_0:\mu_1 \geqq \mu_2$)も、同様の考え方で実行できる。
- 「有意」= significant
  - 差が有意である(有意差がある):
    - $H_0: \mu_1=\mu_2$が棄却される。
  - 結果が有意である:
    - 観察された検定統計量$\in$棄却域D
- 標本の大きさ m, n が大きくないとき。
  - 後述(古典的な難問として有名)

母比率の差の検定 (1)

- 例1（ホーエル p.176）
  - 2種の船酔い予防薬：A, B
  - 船員400人を無作為に二分する。
    - グループ1（200人）：Aを服用
    - グループ2（200人）：Bを服用
  - 大しけのあとで、船酔いにならなかった者：
    - グループ1：152人
    - グループ2：132人

母比率の差の検定(2)

- AとBとで予防効果に差があるといえるか？

- 母数の定義:
  - p_1 = Aを服用したときに船酔いにならない確率
    (or たくさんのA服用者のうち船酔いしない者の比率)
  - p_2 = Bを服用したときに船酔いにならない確率
    (or たくさんのB服用者のうち船酔いしない者の比率)
  - 調べるべきは、p_1 と p_2 とに差があるか否か。

母比率の差の検定(3)

- 検定の方法
  - 無作為抽出した n_1 人にAを服用させ、船酔いしなかった人の(標本における)割合: $\hat{p}_1$
  - 無作為抽出した n_2 人にBを服用させ、船酔いしなかった人の(標本における)割合: $\hat{p}_2$
  - このとき、n_1 と n_2 がある程度おおきければ:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \dot{\sim} N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \right)$$

母比率の差の検定(4)

- 母集団における比率 p_1, p_2 を指定すれば、バラツキの方は自動的に定まる！

- このことから、「p_1 と p_2 とに差がない」という仮説を検定するには:
  - 帰無仮説の設定:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \Leftrightarrow p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

  - 棄却域の設定:有意水準α

$$D = \left\{ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mid \hat{p}_1 - \hat{p}_2 < l, \text{ or } \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > u \right\}$$

母比率の差の検定(5)

$$l = 0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2}}$$

$p_1=p_2$ なので、
$p_1=p_2=p$ とする。

$$= -z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$u = z_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$z_{\alpha/2} = (\text{標準正規分布の上側}100(\alpha/2)\%\text{点})$$

母比率の差の検定(6)

- H_0: $p_1 = p_2(=p)$ のもとでの p の推定:

  $\hat{p} =$（グループ全体1, 2で船酔しなかった者の比率）

  理由:
  　H_0のもとでは、AとBの効果に差がないから、グループ1とグループ2とは、予防薬の効果に関して同質的になる。
- $\hat{p}$ を p に代入して、棄却域を決定する。

- 検定統計量の観察
- H_0の採否の判定

母比率の差の検定(7)

- 例1（ホーエル p. 176）の解答：
  - 仮説の設定：
    - $H_0 : p_1 = p_2$
    - $H_1 : p_1 \neq p_2$
  - 棄却域の決定：有意水準 0.05

$$\hat{p} = \frac{152+132}{200+200} = 0.71$$

$$D = \left\{ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mid \hat{p}_1 - \hat{p}_2 < l, \text{ or } \hat{p}_1 - \hat{p}_2 > u \right\}$$

$$l = -1.96\sqrt{0.71(1-0.71)(1/200+1/200)} = -0.09$$

$$u = 0.09$$

母比率の差の検定(8)

- 検定統計量の観察:

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right)_{obs} = \frac{152}{200} - \frac{132}{200} = 0.10$$

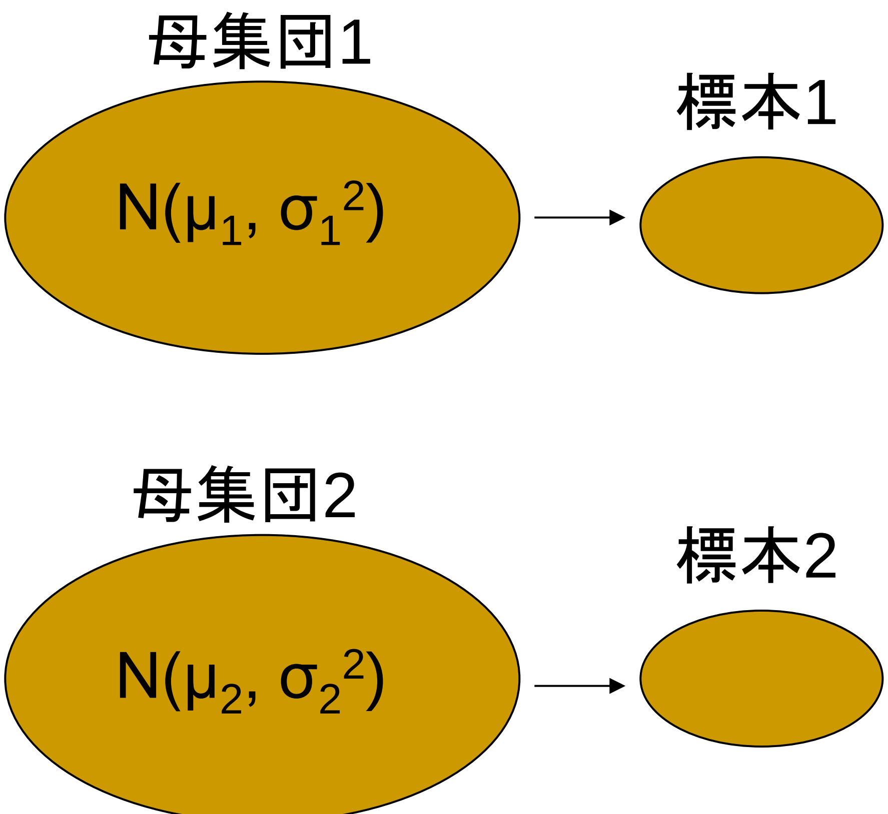
- 判定:

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right)_{obs} \in D$$

したがって、H_0は棄却される(AとBとには効果に差がある)。

小標本における母平均の差の検定(1)

- 二標本問題



$X_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$

$Y_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$

小標本における母平均の差の検定(2)

このとき、

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$$

とすると、$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2/m\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2/n\right)$かつ

両者が独立になるので、

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n\right)$$

または

$$\frac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1)$$

小標本における母平均の差の検定(3)

σ_1^2とσ_2^2とをそれぞれ

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \bar{Y}\right)^2$$

でおきかえたとすると、

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} \sim ?\text{(とても複雑な分布)}$$

Behrens – Fisherの問題として有名。

小標本における母平均の差の検定(4)

ただし、$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$のときには解決されている。

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$とおけば、

$$\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n = \sigma^2(1/m + 1/n)$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$がただしいときのσ^2の推定量として

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \bar{Y}\right)^2}{m+n-2}$$

$$= \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{(m-1)+(n-1)}$$

を使う。

小標本における母平均の差の検定(5)

このとき、

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{s^2\left(1/m+1/n\right)}}\sim t\left(m+n-2\right)$$

が示せる。とくに、$H_0:\mu_1-\mu_2=0$が正しいとき

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)}{\sqrt{s^2\left(1/m+1/n\right)}}\sim t\left(m+n-2\right)$$

これを利用して、母数に依存しない棄却域を設定できる。

小標本における母平均の差の検定(6)

つまり、

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{s^2\left(1/m + 1/n\right)}}$$

とおくとき、

$$W = \left\{t : t < -t_{\alpha/2}(m+n-2), \text{ or } t > t_{\alpha/2}(m+n-2)\right\}$$

ただし、$t_{\alpha/2}(m+n-2)$は自由度$m+n-2$のt分布の

上側$100(\alpha/2)$%点

とすれば、Wが両側検定の棄却域となる。

小標本における母平均の差の検定(7)

まとめると：

$X_i \ (i=1,2,\ldots,m)$が$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$からの無作為標本

$Y_j \ (j=1,2,\ldots,n)$が$N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$からの無作為標本

のとき、

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

を有意水準0.05で検定するには、

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{s^2\left(1/m + 1/n\right)}}$$

として（つぎに続く）

小標本における母平均の差の検定(8)

H_0の棄却域を

$$W = \{t : t < -t_{0.025}(m+n-2), \text{ or } t > t_{0.025}(m+n-2)\}$$

とする。したがって、

$$t_{obs} \in W \Rightarrow H_0 \text{を棄却する。}$$

$$t_{obs} \notin W \Rightarrow H_0 \text{を棄却しない。}$$

Wの代わりに以下のDをH_0の棄却域としてもよい。

$$D = \{\bar{x} - \bar{y} : \bar{x} - \bar{y} < l, \text{ or } \bar{x} - \bar{y} > u\}$$

ただし、$l = -t_{0.025}(m+n-2)\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}$

$$u = t_{0.025}(m+n-2)\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}$$

小標本における母平均の差の検定(9)

- 問題12.2 (p. 252) i)
  - 男女の賃金格差の有無を調べるために、同年齢・同学歴・同職種の男女それぞれ10人ずつを無作為抽出した。
  - 賃金を調べたところ、以下の表のようになった。
  - 「男女間で賃金に格差がある」といえるか。

表1：無作為抽出された男女の賃金（万円）[架空例]

男	15.4	18.3	16.5	17.4	18.9	17.2	15.0	15.7	17.9	16.5
女	14.2	15.9	16.0	14.0	17.0	13.8	15.2	14.5	15.0	14.4

小標本における母平均の差の検定(10)

まず、

　男子の賃金 $X_i \ (i=1,2,\ldots,m)$ は $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ からの無作為標本

　女子の賃金 $Y_j \ (j=1,2,\ldots,n)$ は $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ からの無作為標本

とみなす。

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_0 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

を有意水準0.05で検定する。H_0 の棄却域は、

$$t = (\bar{x} - \bar{y}) \Big/ \sqrt{s^2 (1/m + 1/n)}$$

として、

$$W = \{t : t < -2.101, \text{ or } t > 2.101\}$$

小標本における母平均の差の検定(11)

観察値にもとづいて統計量を計算すると、

$$\bar{x} = 16.88,\ s_1^2 = 1.66,\ \bar{y} = 15.00,\ s_2^2 = 1.06$$

$$s^2 = 1.36$$

これらから、

$$t_{obs} = \frac{16.88 - 15.00}{\sqrt{1.36(1/10 + 1/10)}} = 3.61$$

したがって、

$t_{obs} \in W \Rightarrow H_0$を棄却する。