統計学（旧 統計理論）01

早稲田大学政治経済学部

第17回

西郷 浩

本日の目標

- 母分散の比の検定（*F*検定）
- χ^2検定
  - 適合度検定
  - 質的要因の独立性の検定

標準的な検定手順(1)

1. 仮説の設定
   - 帰無仮説 H_0
   - 対立仮説 H_1
2. 検定統計量の選択
   - 理論的考察によって、どの統計量を使うべきかはすでにわかっている。
3. 棄却域(臨界値)の決定
   - 理論的考察によって、どのように H_0 の棄却域を決めるべきかはすでにわかっている。

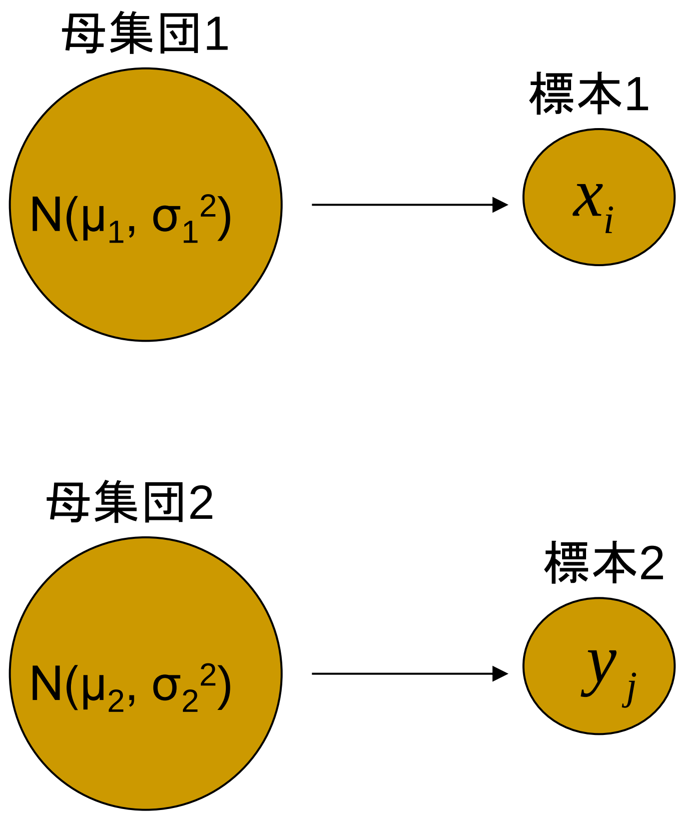
標準的な検定手順(2)

4. データから検定統計量の値を計算する。
5. 最終判断
   - 計算した検定統計量が H_0 の棄却域にふくまれる。
     ⇒ H_0 を棄却（否定）する。
   - 計算した検定統計量が H_0 の棄却域にふくまれない。
     ⇒ H_0 を棄却（否定）しない。

- 上のステップ2、３でどんなにみなれない検定統計量（計算式）がでてきても、考え方そのものはどの検定もほぼ同じである。

母分散の比の検定(1)

- 2つの（正規）母集団のバラツキの比較



標本分散

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2\ ?$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2$$

母分散の比の検定(2)

1. 仮説の設定
   - 帰無仮説 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
   - 対立仮説 $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
2. 検定統計量の選択
   - $F = s_1^2/s_2^2$
3. 棄却域の決定
   - H_0のもとで、$F \sim \mathrm{F}(m\text{-}1, n\text{-}1)$ 自由度 m-1, n-1 のF分布
   - したがって、棄却域 $W=\{F: F \leqq \mathrm{F}_{0.975}(m\text{-}1, n\text{-}1)$ or $F \geqq \mathrm{F}_{0.025}(m\text{-}1, n\text{-}1)\}$

自由度 m-1, n-1 のF分布の上側確率点

母分散の比の検定(3)

4. 標本からの検定統計量の計算
   - $F_{obs} = s_1{}^2{}_{obs} \,/\, s_2{}^2{}_{obs}$
5. 最終判断
   - $F_{obs} \in W \Rightarrow \mathrm{H}_0(\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2)$ を否定する。
   - $F_{obs} \notin W \Rightarrow \mathrm{H}_0(\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2)$ を否定しない。

- 例＜続＞ p.245
  - 問題11.5（教科書 p. 243 の説明は誤植？）
  - ラットの投薬群（薬を投与したグループ10匹）と対称群（薬を投与しないグループ10匹）のバラツキに差があるか？

母分散の比の検定(4)

1. 仮説の設定
   - 帰無仮説 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
   - 対立仮説 $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
2. 検定統計量の選択
   - $F = s_1^2/s_2^2$
3. 棄却域の決定
   - H_0のもとで、$F \sim \mathrm{F}(10\text{-}1, 10\text{-}1)$
   - 棄却域 $W=\{F: F \leqq \mathrm{F}_{0.975}(9, 9)=0.248 \text{ or } F \geqq \mathrm{F}_{0.025}(9, 9)=4.026\}$（教科書 p.245 ???）

母分散の比の検定(5)

4. 標本からの検定統計量の計算
   - $F_{obs} = s_1{}^2{}_{obs} \,/\, s_2{}^2{}_{obs} = 0.0761/0.0294 = 2.59$
5. 最終判断
   - $F_{obs} = 2.59 \notin W \Rightarrow \mathrm{H}_0(\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2)$ を否定しない。

適合度の検定(1)

- 架空例:
  - サイコロを600回振って出目を観察したところ、表1のようになった。
  - このサイコロは公正である(どの出目も等しい確率で出現する)といえるか。

表1:サイコロの出目の出現回数(架空のデータ)

出目	1	2	3	4	5	6	合計
出現度数	96	102	106	89	103	104	600

適合度の検定(2)

1. 仮説の設定
   - 帰無仮説 H_0:どの出目も等しい確率 1/6 で出現
   - 対立仮説 H_1:少なくともひとつの出目の出現確率が異なる。
2. 検定統計量の選択(天下り的説明)
   - もし、H_0 が正しければ、いずれの出目も平均的に 600×1/6 = 100 回 出現する。これを理論度数とよぶ。
   - 観測された度数と理論度数とのズレが大きければ、H_0 が成り立っていないと考える。

適合度の検定(3)

- ズレをどのように測るか？
  - χ^2 = ∑{差の2乗/理論度数}
- H_0 が正しいとき、
  - $\chi^2 \sim \chi^2(6\text{-}1)$ 自由度 6-1 のχ^2 分布

表2: サイコロの出目データについての観測度数と理論度数

	1	2	3	4	5	6	合計
観測	96	102	106	89	103	104	600
理論	100	100	100	100	100	100	600
差	-4	2	6	-11	3	4	--

適合度の検定(4)

3. 棄却域の決定（有意水準0.05）

$$W=\left\{\chi^2:\chi^2\geq\chi^2_{0.05}(6-1)=11.0705\right\}$$

4. 検定統計量の計算

$$\chi^2_{\mathrm{obs}}=\frac{(-4)^2}{100}+\frac{2^2}{100}+\frac{6^2}{100}+\frac{(-11)^2}{100}+\frac{3^2}{100}+\frac{4^2}{100}$$

$$=2.02$$

5. 最終判断

$\chi^2_{\mathrm{obs}}\notin W\Rightarrow H_0$を否定しない。

質的要因の独立性の検定(1)

- 英語と数学の成績
  - 表3(架空のデータ)
- 英語と数学の成績は独立(無関係)といえるか?

表3:数学・英語の成績の観測度数

数＼英	優	良	可	計
優	12	12	6	30
良	10	22	8	40
可	8	10	12	30
計	30	40	30	100

質的要因の独立性の検定(2)

- 事象の独立（復習）
  - 「事象 A, B が独立」とは、以下の式が成り立つこと。
    - $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$
- 今の問題の場合には、
  - 「数学と英語の成績が独立」とは、以下が成り立つこと。
    - A=「英語の成績が優」、B=「数学の成績が優」として、$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$
    - 他の成績の組み合わせについても同様の式が成り立つ。

質的要因の独立性の検定(3)

- 帰無仮説「英語と数学の成績は独立」のもとでの理論度数の計算
  - 英語（数学）の成績の出現確率の推定：
    - たとえば、*A*=「英語の成績が優」としたら、P(*A*) を以下のように推定する。
      - P(*A*)の推定値 = (英語の成績が優の者の数）/総度数 = 30/100
    - 他の科目・成績についても同様
  - 帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しければ、*B*=「数学の成績が優」として、P(*A*∩*B*)=P(*A*) P(*B*)なのだから、推定にもこの式を利用する。

質的要因の独立性の検定(4)

- つまり、
  - P(*A*)の推定値 = (英語の成績が優の者の数)/総度数 = 30/100
  - P(*B*)の推定値 = (数学の成績が優の者の数)/総度数 = 30/100
  - P(*A*∩*B*)の推定値=P(*A*)の推定値×P(*B*)の推定値 =30/100×30/100=9/100
- 同様にしてすべての科目・成績の組み合わせについて、帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいとしたときの出現確率の推定値を求める。

- 推定された出現確率に総度数を乗じて、帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいときの理論度数を求める。

質的要因の独立性の検定(5)

- 英語と数学の成績の理論度数(表4)
  - 帰無仮説「英語と数学の成績は独立」が正しいとしたときの理論度数であることに注意。
- 観測度数(表3)と理論度数(表4)とのズレが大きければ帰無仮説を否定する。

表4:数学・英語の成績の理論度数

数＼英	優	良	可	計
優	9	12	9	30
良	12	16	12	40
可	9	12	9	30
計	30	40	30	100

質的要因の独立性の検定(6)

- ズレをどのように測るか？
  - 差=観測度数-理論度数 として
    - $\chi^2 = \sum${差の2乗/理論度数}
  - 帰無仮説「英語と数学の成績が独立」であれば、
    - $\chi^2 \sim \chi^2((3-1)\times(3-1))$ 自由度4のχ^2分布

質的要因の独立性の検定(7)

1. 仮説の設定
   - 帰無仮説 H_0 : 英語と数学の成績が独立である。
   - 対立仮説 H_1 : 英語と数学の成績が独立ではない。
2. 検定統計量の選択
   - $\chi^2 = \sum\{($観測度数-理論度数$)^2/$理論度数$\}$
3. 棄却域の決定
   - $W = \{\chi^2 : \chi^2 \geqq \chi^2_{0.05}((3-1)\times(3-1))=9.48773\}$
4. 検定統計量の計算

質的要因の独立性の検定(8)

χ^2_{obs}

$=(12-9)^2/9+(12-12)^2/12$
$+(6-9)^2/9+(10-12)^2/12$
$+(22-16)^2/16+(8-12)^2/12$
$+(8-9)^2/9+(10-12)^2/12$
$+(12-9)^2/9$
$= 7.36$

- 最終判断
  - $\chi^2_{obs} \notin W$

表5 観測度数と理論度数（カッコ内）

数＼英	優	良	可	計
優	12 (9)	12 (12)	6 (9)	30
良	10 (12)	22 (16)	8 (12)	40
可	8 (9)	10 (12)	12 (9)	30
計	30	40	30	100