統計学 01

早稲田大学政治経済学部
第19回
西郷 浩

本日の目標

- 回帰係数の推定・検定
  - 回帰係数の最小二乗推定量の標本分布
  - 回帰係数に関する推定
  - 回帰係数に関する検定

回帰係数の最小二乗推定量の標本分布(1)

- 回帰係数（傾き、定数項）の最小二乗推定量
  - 確率変数である。シミュレーション
    - 誤差項の偶然的な変動によって異なる値をとるため。
  - その確率分布（＝標本分布）を求めたい。
  - そのためには、誤差項の性質が明らかにされなければならない。
    - 回帰係数の最小二乗推定量の確率的変動は誤差項によってもたらされるため。
  - 誤差項にはどのような性質をもっていると考えるか。

回帰係数の最小二乗推定量の標本分布(2)

- 回帰モデル
  - $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i$
- 誤差項の性質（p. 259 の(a), (b), (c)+正規性）
  a. 誤差項の期待値は0：$E(\varepsilon_i)=0$
  b. 誤差項の分散は一定：$V(\varepsilon_i)=\sigma^2$
  c. 異なる誤差項は無相関：$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=E(\varepsilon_i \varepsilon_j)=0$
  d. 誤差項が正規分布に従う。

以上をまとめて、

$\varepsilon_j \sim N(0, \sigma^2)$ かつ相互に独立

回帰係数の最小二乗推定量の標本分布(3)

誤差項が以上4つの性質をもつとき、

傾きβ_2の最小二乗推定量

$$\hat{\beta}_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

は以下の性質をもつ。

$$(a)\ E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2$$

$$(b)\ V\left(\hat{\beta}_2\right) = \sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

(c) $\hat{\beta}_2$は正規分布に従う。

回帰係数の最小二乗推定量の標本分布(4)

$(a), (b), (c)$をまとめて

$$\hat{\beta}_2 \sim N\left(\beta_2, \sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)$$

または
$$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{\sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}} \sim N(0, 1)$$

さらに、

$$(d)\ \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}} \sim t(n-2)$$

ただし、$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 \quad with \quad \hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$

回帰係数(傾き)に関する推定(1)

信頼係数0.95の傾きβ_2の区間推定の構成

性質(d)から

$$P\left(-t_{0.025}(n-2) < \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}} < t_{0.025}(n-2)\right) = 0.95$$

カッコ内は、

$$\hat{\beta}_2 - t_{0.025}(n-2)\sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}} < \beta_2 < \hat{\beta}_2 + t_{0.025}(n-2)\sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}$$

と同等である。

回帰係数（傾き）に関する推定(2)

したがって、

$$\left[\hat{\beta}_2 - t_{0.025}(n-2)\sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2},\ \hat{\beta}_2 + t_{0.025}(n-2)\sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]$$

とすれば、β_2に関する信頼係数0.95の信頼区間となる。

例：気圧データ（表13.1 p.258）

$$\hat{\beta}_2 = 0.9822,\ s^2 = 9.911,\ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 335.6$$

$$t_{0.025}(20-2) = 2.101$$

したがって、β_2に関する信頼係数0.95の信頼区間は

$$\hat{\beta}_2 \pm t_{0.025}(20-2)\sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$= 0.9822 \pm 2.101\sqrt{9.911/335.6} = 0.9822 \pm 0.361$$

$$= 0.621,\ 1.343$$

回帰係数（傾き）に関する検定(1)

性質(d)を利用してβ_2に関する仮説検定を構成する。

(1)仮説の設定

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = a \\ H_1 : \beta_2 \neq a \end{cases} \quad (a\text{は何かの一定値})$$

(2)検定統計量の選択

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - a}{\sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}} \quad \left(\sim t(n-2) \text{ if } H_0 \text{ is true.} \right)$$

(3)棄却域の決定（有意水準を0.05として）

$$W = \left\{ t : t < -t_{0.025}(n-2) \; or \; t > t_{0.025}(n-2) \right\}$$

回帰係数(傾き)に関する検定(2)

(4)判定

$t_{obs} \in W \Rightarrow H_0 : \beta_2 = a$ を棄却する。

$t_{obs} \notin W \Rightarrow H_0 : \beta_2 = a$ を棄却しない。

a の値としてとくに $a = 0$ が多用される。

理由：

$a = 0 \Leftrightarrow Y_i = \beta_1 + \varepsilon_i \Leftrightarrow Y$ と X とが無関係

と解釈できるので、関係の有無の検定に相当する。

回帰係数(傾き)に関する検定(3)

例：気圧データ(表13.1 p.258)

(1)仮説の設定

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = 0 \\ H_1 : \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

(2)検定統計量の選択

$$t = \hat{\beta}_2 \Big/ \sqrt{s^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

(3)棄却域の決定（有意水準0.05）

$$W = \{t : t < -2.101 \; or \; t > 2.101\}$$

$$t_{0.025}(20-2) = 2.101$$

(4)判定

$t_{obs} = 0.9822 \Big/ \sqrt{9.911/335.6} = 5.72 \in W \Rightarrow H_0$を棄却する。

最小二乗法にもとづく回帰係数の推定・検定についての補足

- 定数項β_1についての推定・検定
  - 傾きβ_2と同様に（ただし、V（β_1_hat) の公式が異なることに注意）おこなえる。
- 説明変数が複数あるモデル（重回帰分析）
  - $Y_i = \beta_1+\beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$
  - 最小二乗法にもとづいて推定・検定がおこなえる。
- ガウス＝マルコフの定理
  - 最小二乗推定量は、ある自然な推定量のクラス（線形不偏推定量）の中で、分散が最小（精度が最高）の推定量になる。←最小二乗法を使用する理論的根拠