統計学

第21回

早稲田大学政治経済学部
西郷 浩

本日の目標

- 分散分析
  - 一元配置
    - 基本的な考え方
  - 二元配置
    - 基本的な考え方
      - 交互作用
- 参考図書
  - P. G. ホーエル (1981)『初等統計学』培風館
  - 倉田博史・星野崇宏(2009)『入門統計解析』新世社

一元配置

- 例（ホーエル pp. 234-240）
  - 3種類の銘柄(A, B, C)のタイプライター
  - 性能に差があるかどうかを調べたい。
  - 検査方法
    - 24人のタイピストを8人ずつ無作為に3種類のタイプライターに割り当てる。
    - 24人について評点（たとえば、ミスタイプの数）を調べる。
    - 結果
      - A: 44, 39, 33, 56, 43, 56, 47, 58
      - B: 40, 37, 28, 53, 38, 51, 45, 60
      - C: 54, 50, 40, 55, 45, 66, 49, 65

一元配置

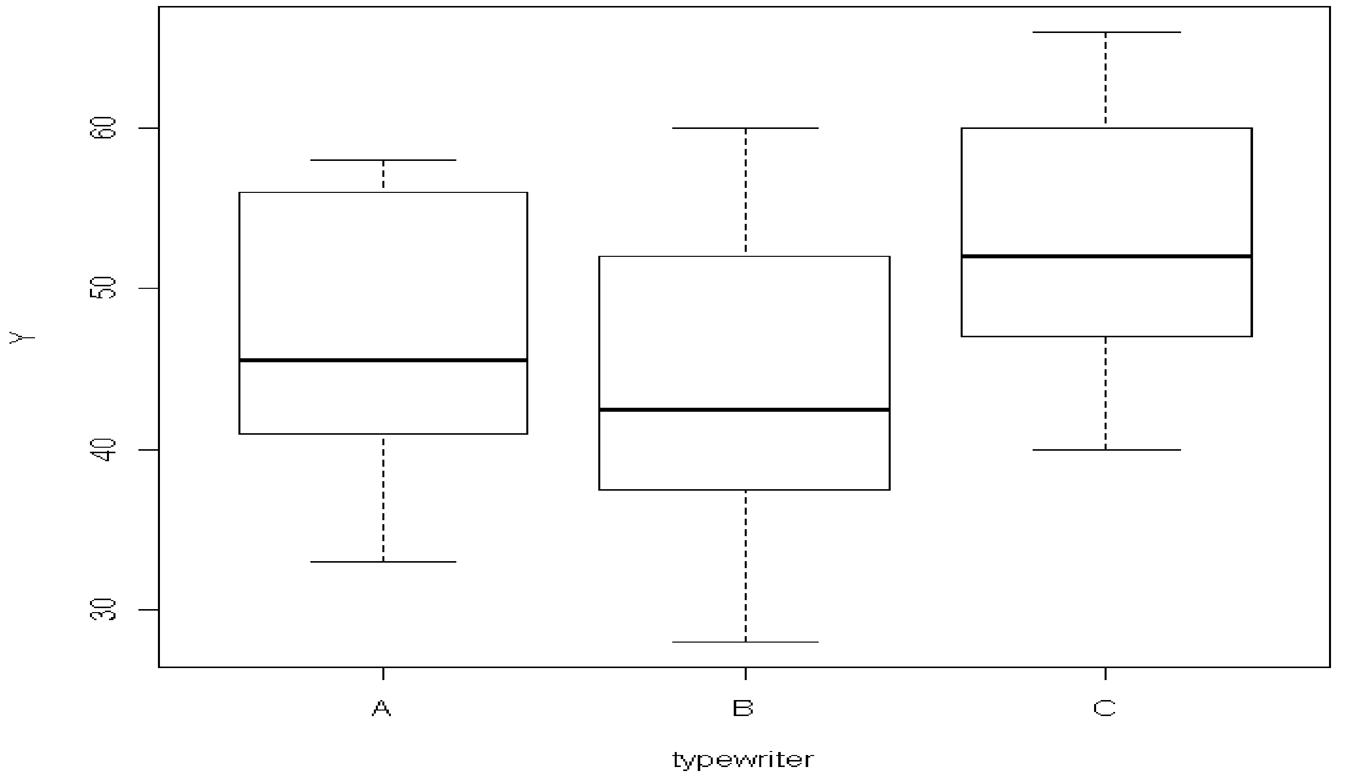

図1：箱ヒゲ図

一元配置

- 2種類ずつの比較
  - 2標本問題
- 3種類以上のグループの比較
  - 2標本問題の反復適用は危険である。
    - 多重比較
- 3種類以上のグループの平均の均等性の同時比較
  - 分散分析

一元配置

$$Y_{ij} \sim N\left(\mu_i, \sigma^2\right) \quad \left(j = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, 3\right)$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 : \text{otherwise} \end{cases}$$

どのように検定するか。

一元配置

これまでの知識の整理：

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}, \quad s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2$$

(0.1) $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$　が相互に独立

(0.2) s_1^2, s_2^2, s_2^2　が相互に独立

(1) $\bar{Y}_i, s_i^2$　が独立

(2) $\bar{Y}_i \sim N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{(n-1)s_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

一元配置

さらに　H_0　が正しいとき：

$$(3)\ \bar{Y}_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ where } \mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

σ^2の2つの推定量

$$(1)\ \hat{\sigma}^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{3}$$

$$\text{Note: } E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

$$(2)\ \frac{\tilde{\sigma}^2}{n} = \frac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{3}\left(\bar{Y}_i - \bar{\bar{Y}}\right)^2, \text{ where } \bar{\bar{Y}} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\bar{Y}_i$$

$$\text{Note: } E\left(\tilde{\sigma}^2\right) = \sigma^2 \quad \text{if } H_0 \text{ is true.}$$

一元配置

H_0　が正しいとき：

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} \sim F\left(3-1, 3(n-1)\right)$$

H_0　が正しくないとき：

$\dfrac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}$　は大きな値をとりやすくなる。

検定方式

$$\text{Reject } H_0 \text{ if } \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)_{obs} > F_{0.05}\left(3-1, 3(n-1)\right)$$

一元配置

タイプライターデータ

$$\bar{y}_1 = 47,\ s_1^2 = 81.1,\ \bar{y}_2 = 44,\ s_2^2 = 106.3,\ \bar{y}_3 = 53,\ s_2^2 = 82.3$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{81.1 + 106.3 + 82.3}{3} = 89.9$$

$$\tilde{\sigma}^2 = 8 \times \frac{1}{3-1}\left\{(47-48)^2 + (44-48)^2 + (53-48)^2\right\} = 168$$

$$\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)_{obs} = \frac{168}{89.9} = 1.87 < F_{0.05}(2,\ 21) = 3.47$$

H_0 is accepted (not rejected).

一元配置

表1：ANOVA table：

Source	SS	d.f.	MS	F
Type	$n\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{Y}_i-\overline{\overline{Y}}\right)^2=SS_1$	$m-1$	$\dfrac{SS_1}{m-1}=MS_1$	$\dfrac{MS_1}{MS_2}$
Error	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_i\right)^2=SS_2$	$m(n-1)$	$\dfrac{SS_2}{m(n-1)}=MS_2$	
Total	$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\overline{\overline{Y}}\right)^2=SS_0$	$mn-1$		

Note: $SS_0=SS_1+SS_2$

一元配置

回帰分析との対応関係：

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 2\left(\text{group B}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 3\left(\text{group C}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \beta_1 + \beta_2 B_{ij} + \beta_3 C_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \text{where } \varepsilon_{ij} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

つまり：

$$Y_{ij} = \begin{cases} \beta_1 + \varepsilon_{1j} & \text{for } i = 1\left(\text{group A}\right) \\ \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_{2j} & \text{for } i = 2\left(\text{group B}\right) \\ \beta_1 + \beta_3 + \varepsilon_{3j} & \text{for } i = 3\left(\text{group C}\right) \end{cases}$$

一元配置

回帰係数の書き換え：

$$\beta_1 = \mu_1$$

$$\beta_2 = \mu_2 - \mu_1$$

$$\beta_3 = \mu_3 - \mu_1$$

回帰式の書き換え：

$$Y_{ij} = \begin{cases} \mu_1 + \varepsilon_{1j} & \text{for } i = 1 \text{ (group A)} \\ \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) + \varepsilon_{2j} & \text{for } i = 2 \text{ (group B)} \\ \mu_1 + (\mu_3 - \mu_1) + \varepsilon_{3j} & \text{for } i = 3 \text{ (group C)} \end{cases}$$

つまり：

$$Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

一元配置

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \Leftrightarrow \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 : \text{少なくとも1つ異なる} \Leftrightarrow \beta_2 \neq 0 \text{ and/or } \beta_3 \neq 0 \end{cases}$$

したがって、回帰係数の有意性の検定に帰着できる。

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{ where } y_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1_n & 0_n & 0_n \\ 1_n & 1_n & 0_n \\ 1_n & 0_n & 1_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

$$1_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, 0_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \text{ where } \varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{in} \end{bmatrix}$$

一元配置

Matrix notation

$$y = X\beta + \varepsilon$$

The Least Squares method:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y,$$

where

$$X'X = \begin{bmatrix} 3n & n & n \\ n & n & 0 \\ n & 0 & n \end{bmatrix}, \quad (X'X)^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} n\overline{Y}_1 + n\overline{Y}_2 + n\overline{Y}_3 \\ n\overline{Y}_2 \\ n\overline{Y}_3 \end{bmatrix}$$

一元配置

したがって、

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1 \\ \overline{Y}_3 - \overline{Y}_1 \end{bmatrix}$$

残差は、

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} Y_{1j} - \overline{Y}_1 & \text{if } i = 1 \, (\text{group A}) \\ Y_{2j} - \overline{Y}_2 & \text{if } i = 2 \, (\text{group B}) \\ Y_{3j} - \overline{Y}_3 & \text{if } i = 3 \, (\text{group C}) \end{cases}$$

残差の分散の推定量は、

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{ij}^2}{3n-3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} \left(Y_{ij} - \overline{Y}_i \right)^2}{3(n-1)}$$

一元配置

$$Y_{ij} = \beta_1 + \beta_2 B_{ij} + \beta_3 C_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 : \beta_2 \neq 0 \text{ and/or } \beta_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Model0} : Y_{ij} = \beta_1 + \varepsilon_{ij}$$

$$\text{Model1} : Y_{ij} = \beta_1 + \beta_2 B_{ij} + \beta_3 C_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

Residuals

$$\text{Model0} : \tilde{\beta}_1 = \overline{\overline{Y}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \overline{\overline{Y}}$$

$$\text{Model1} : \hat{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} Y_{1j} - \overline{Y}_1 & \text{if } i = 1 \left(\text{group A}\right) \\ Y_{2j} - \overline{Y}_2 & \text{if } i = 2 \left(\text{group B}\right) \\ Y_{3j} - \overline{Y}_3 & \text{if } i = 3 \left(\text{group C}\right) \end{cases}$$

一元配置

Model0とModel1の当てはまりの差：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{2}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}$$

残差の自由度の差：

$$(3n-1)-(3n-3)=2\ (\text{Model0で節約している係数の数})$$

H_0(Model0)が正しいとき：

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{2}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}}{(3n-1)-(3n-3)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}}{(3n-3)}}\sim F(2,3n-3)$$

一元配置

Model0とModel1の当てはまりの差の分解：

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{2}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{\bar{Y}}\right)^{2}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{Y}_{i}\right)^{2}$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{Y}_{i}-Y\right)^{2}$$

したがって、

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{2}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}}{(3n-1)-(3n-3)}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{ij}^{2}}{(3n-3)}}=\frac{n\dfrac{1}{3-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{Y}_{i}-Y\right)^{2}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\bar{\bar{Y}}\right)^{2}}{3(n-1)}}=\frac{\tilde{\sigma}^{2}}{\hat{\sigma}^{2}}$$

二元配置

- 血圧を下げる作用のある薬（倉田・星野2009）
  - 薬A：3水準（S, M, L）
  - 薬B：2水準（S, L）
  - 併用できる。
  - 30人を無作為に以下の組み合わせ (A, B) に割付。
    - (S, S): -3, 7, -5, 7, 8
    - (S, L): 15, 13, 18, 8, 9
    - (M, S): 13, 18, 10, 12, 22
    - (M, L): 19, 16, 25, 25, 32
    - (L, S): 14, 12, 20, 14, 20
    - (L, L): 16, 1, 14, 15, 14

二元配置

- 併用によってどのような効果がありうるか。
  - 薬Aによる効果
  - 薬Bによる効果
  - 薬Aと薬Bとの組み合わせによる効果
  - 以上ではあらわせない誤差

二元配置

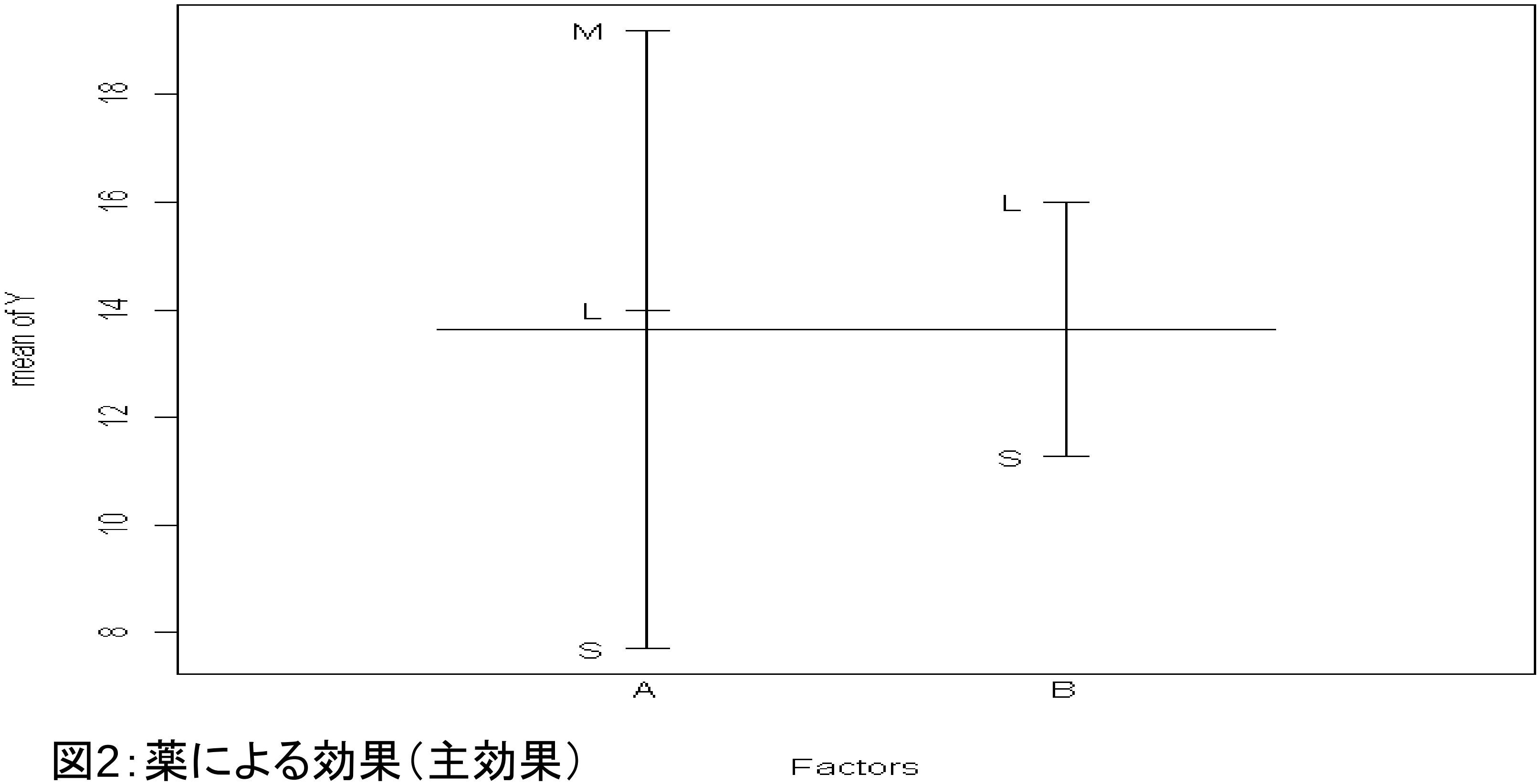

図2：薬による効果（主効果）

二元配置

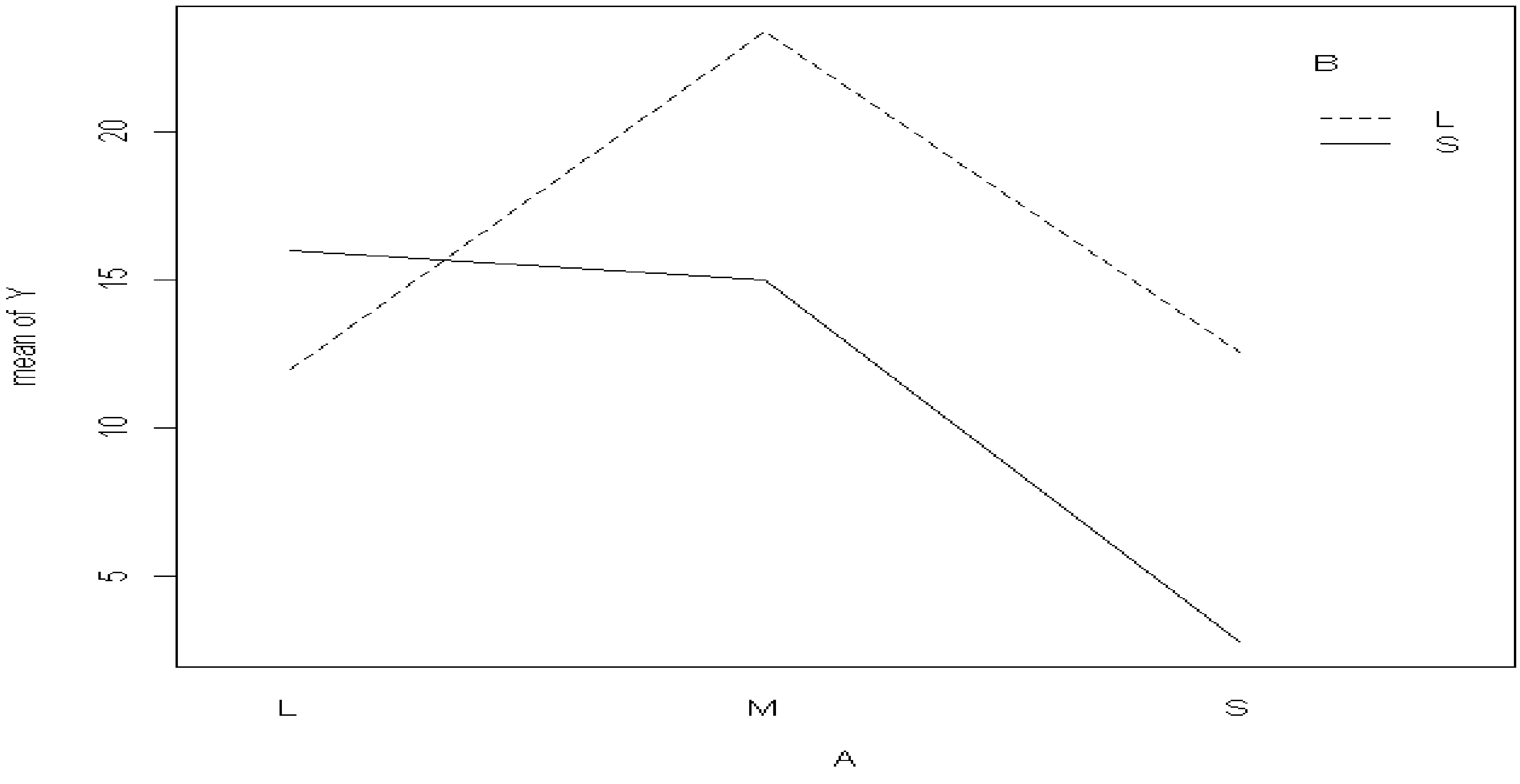

図3：薬Aと薬Bの組み合わせの効果（交互作用）

二元配置

$$Y_{ijk} : i = S, M, L \text{ (or 1, 2, 3 for A)}$$

$$j = S, L \text{ (or 1, 2 for B)}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n (= 5) \text{ (for individuals)}$$

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$$\text{Main effect A}: \quad \alpha_i \quad \left(\sum_i \alpha_i = 0\right)$$

$$\text{Main effect B}: \quad \beta_j \quad \left(\sum_j \beta_j = 0\right)$$

$$\text{Interaction AB}: \quad (\alpha\beta)_{ij} \quad \left(\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0\right)$$

$$\text{Error}: \quad \varepsilon_{ijk} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

二元配置

$$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{1}{3\times 2\times n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$$

$$\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{2\times n}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$$

$$\bar{Y}_{\bullet j\bullet} = \frac{1}{3\times n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$$

$$\bar{Y}_{ij\bullet} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}$$

$$\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\bar{Y}_{i\bullet\bullet} = \frac{1}{3\times 2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} Y_{ij\bullet}$$

二元配置

$$
\begin{aligned}
Y_{ijk} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = & \left(\overline{Y}_{i\bullet\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right) + \left(\overline{Y}_{\bullet j\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right) \\
& + \left\{\left(\overline{Y}_{ij\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right) - \left(\overline{Y}_{i\bullet\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right) - \left(\overline{Y}_{\bullet j\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)\right\} \\
& + \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij\bullet}\right)
\end{aligned}
$$

$$
Y_{ijk} - \hat{\mu} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + (\alpha\beta)_{ij}^{hat} + \hat{\varepsilon}_{ijk}
$$

二元配置

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij\bullet}\right)^2}{3\times 2\times(n-1)}\right)=\sigma^2$$

$$E\left(\frac{n\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(\bar{Y}_{ij\bullet}-\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{\bullet j\bullet}+\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2}{(3-1)\times(2-1)}\right)=\sigma^2 \quad \text{if } (\alpha\beta)_{ij}=0$$

$$E\left(\frac{2n\sum_{i=1}^{3}\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2}{3-1}\right)=\sigma^2 \quad \text{if } \alpha_i=0$$

$$E\left(\frac{3n\sum_{j=1}^{2}\left(\bar{Y}_{\bullet j\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2}{2-1}\right)=\sigma^2 \quad \text{if } \beta_j=0$$

二元配置

表2：ANOVA Table

Source	SS	d.f.	MSF	F
A	$2n\sum_{i=1}^{3}\left(\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = SS_A$	3-1	$MS_A = {SS_A}/{(3-1)}$	${MS_A}/{MS_E}$
B	$3n\sum_{j=1}^{2}\left(\bar{Y}_{\bullet j\bullet}-\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = SS_B$	2-1	$MS_B = {SS_B}/{(2-1)}$	${MS_B}/{MS_E}$
AB	$n\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(\bar{Y}_{ij\bullet}-\bar{Y}_{i\bullet\bullet}-\bar{Y}_{\bullet j\bullet}+\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = SS_{AB}$	$(3-1)(2-1)$	$MS_B = {SS_B}/{(3-1)(2-1)}$	${MS_{AB}}/{MS_E}$
Error	$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij\bullet}\right)^2 = SS_E$	$3\times 2(n-1)$	$MS_E = {SS_E}/{3\times 2(n-1)}$	
Total	$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}-\bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}\right)^2 = SS_T$	$3\times 2n-1$		

二元配置

仮説検定の方法

$$\frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F\left((3-1)(2-1), 3\times 2(n-1)\right) \text{ under } H_{AB0} : (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\frac{MS_A}{MS_E} \sim F\left((3-1), 3\times 2(n-1)\right) \text{ under } H_{A0} : \alpha_i = 0$$

$$\frac{MS_B}{MS_E} \sim F\left((2-1), 3\times 2(n-1)\right) \text{ under } H_{B0} : \beta_j = 0$$

二元配置

ANOVA表の出力例

```
> summary(aov(Y~A*B, data=kurata.hoshino.two.way.df))
          Df   Sum Sq  Mean Sq  F value  Pr(>F)
A          2   663.27   331.63  11.6159  0.0002963 ***
B          1   168.03   168.03   5.8856  0.0231497 *
A:B        2   288.47   144.23   5.0520  0.0147531 *
Resid     24   685.20    28.55
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

二元配置

回帰分析との対応関係

$$Y_{ijk} = \gamma_1 + \gamma_2 AM_{ijk} + \gamma_3 AL_{ijk} + \gamma_4 BL_{ijk} + \gamma_5 AM_{ijk} BL_{ijk} + \gamma_6 AL_{ijk} BL_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

where

$$AM_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = 2 \text{ (i.e., } A = M) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}, \quad AL_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ if } i = 3 \text{ (i.e., } A = L) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases},$$

$$BL_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ if } j = 2 \text{ (i.e., } B = L) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

二元配置

$$
Y_{ijk} = \begin{cases}
\gamma_1 + \varepsilon_{11k} & \text{for } (A, B) = (S, S) \\
\gamma_1 + \gamma_2 + \varepsilon_{21k} & \text{for } (M, S) \\
\gamma_1 \qquad\quad + \gamma_3 + \varepsilon_{31k} & \text{for } (L, S) \\
\gamma_1 \qquad\qquad\quad + \gamma_4 + \varepsilon_{12k} & \text{for } (S, L) \\
\gamma_1 + \gamma_2 \qquad\quad + \gamma_4 + \gamma_5 + \varepsilon_{22k} & \text{for } (M, L) \\
\gamma_1 \qquad\quad + \gamma_3 + \gamma_4 \qquad\quad + \gamma_6 + \varepsilon_{32k} & \text{for } (L, L)
\end{cases}
$$

二元配置

$$\gamma_1 = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$$
$$\gamma_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) + [(\alpha\beta)_{21} - (\alpha\beta)_{11}]$$
$$\gamma_3 = (\alpha_3 - \alpha_1) + [(\alpha\beta)_{31} - (\alpha\beta)_{11}]$$
$$\gamma_4 = (\beta_2 - \beta_1) + [(\alpha\beta)_{12} - (\alpha\beta)_{11}]$$
$$\gamma_5 = (\alpha\beta)_{22} - (\alpha\beta)_{21} - (\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{11}$$
$$\gamma_6 = (\alpha\beta)_{32} - (\alpha\beta)_{31} - (\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{11}$$

二元配置

$$y = X\gamma + \varepsilon$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{32} \end{bmatrix}, \; y_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{ij1} \\ Y_{ij2} \\ \vdots \\ Y_{ijn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} 1_n & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 1_n & 1_n & 0_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 1_n & 0_n & 1_n & 0_n & 0_n & 0_n \\ 1_n & 0_n & 0_n & 1_n & 0_n & 0_n \\ 1_n & 1_n & 0_n & 1_n & 1_n & 0_n \\ 1_n & 0_n & 1_n & 1_n & 0_n & 1_n \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix}, \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ij1} \\ \varepsilon_{ij2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ijn} \end{bmatrix}$$

まとめ

- 分散分析
  - 被説明変数：量的変数
  - 説明変数：質的変数（水準）
    - ダミー変数で表現できる。
  - 回帰モデルとして分析することもできる。
  - F分布にもとづく検定
    - 「複数の回帰係数が全部0かどうか」を検定するためには、F分布がもちいられるため。